Bruno Oliveira de Almeida

O Princípio de Arquimedes e o Cálculo do Volume de Sólidos Quaisquer

Rio Grande, Rio Grande do Sul, Brasil

Dezembro, 2020

Bruno Oliveira de Almeida

O Princípio de Arquimedes e o Cálculo do Volume de Sólidos Quaisquer

Trabalho de Conclusão de Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT submetido por Bruno Oliveira de Almeida junto ao Instituto de Matemática, Estatística e Física da Universidade Federal do Rio Grande.

Universidade Federal do Rio Grande - FURG

Instituto de Matemática, Estatística e Física - IMEF

Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

Orientador: Dr. Rodrigo Barbosa Soares

Coorientador: Dra. Cinthya Maria Schneider Meneghetti

Rio Grande, Rio Grande do Sul, Brasil

Dezembro, 2020

Ficha Catalográfica

A447p Almeida, Bruno Oliveira de.
O princípio de Arquimedes e o cálculo do volume de sólidos quaisquer / Bruno Oliveira de Almeida. – 2020.
37 f.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Rio Grande – FURG, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Rio Grande/RS, 2020.
Orientador: Dr. Rodrigo Barbosa Soares.
Coorientadora: Dra. Cinthya Maria Schneider Meneghetti.

1. Volume 2. Princípio de Arquimedes 3. Sólidos geométricos I. Soares, Rodrigo Barbosa II. Meneghetti, Cinthya Maria Schneider III. Título.

CDU 514:37

Catalogação na Fonte: Bibliotecária Vanessa Ceiglinski Nunes CRB 10/2174

Universidade Federal do Rio Grande
http://www.furg.br

Instituto de Matemática, Estatística e Física
http://www.imef.furg.br

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
http://www.profmat-sbm.org.br

Sociedade Brasileira de Matemática
http://www.sbm.org.br

Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior
http://www.capes.gov.br

Bruno Oliveira de Almeida

O Princípio de Arquimedes e o Cálculo do Volume de Sólidos Quaisquer

Dissertação submetida por Bruno Oliveira de Almeida como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre, pelo Curso de Mestrado Prof ssional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT junto ao Instituto de Matemática, Estatística e Física da Universidade Federal do Rio Grande.

Trabalho aprovado. Rio Grande, 08 de Dezembro de 2020:

RODRIGO BARBOSA SOARES

Dr. Rodrigo Barbosa Soares
(Orientador - FURG)

Cinthya M. S. Meneghetti

Dra. Cinthya Maria Schneider Meneghetti
(Coorientadora - FURG)

Dra. Lisandra de Oliveira Sauer
(Avaliador - UFPel)

Dra. Daiane Silva de Freitas
(Avaliador - FURG)

Dra. Bárbara Denicol do Amaral Rodriguez
(Avaliador - FURG)

Rio Grande, Rio Grande do Sul, Brasil
Dezembro, 2020

Sumário

Lista de ilustrações

Resumo

Este trabalho propõe utilizar o Princípio de Arquimedes como método para calcular o volume de sólidos, além de propor avaliar qualitativamente a relevância da aplicação do mesmo. O objetivo geral é que os discentes se apropriem deste princípio como um método alternativo para o cálculo do volume de objetos físicos, inclusive os que estão presentes em seu cotidiano. Além disso, deseja-se que os alunos não somente consigam calcular o volume de sólidos geométricos, mas, também, através do Princípio de Arquimedes, calcular o volume de quaisquer sólidos que assim desejarem. O desenvolvimento das atividades permeia a interdisciplinaridade, o uso de material concreto e a aplicação de questionários. No desfecho, espera-se que os alunos se apropriem do Princípio de Arquimedes, ressignificando, através deste, o aprendizado sobre volume de sólidos geométricos.

Palavras-chave: Volume. Princípio de Arquimedes. Sólidos Geométricos.

Abstract

This work intend to use the Arquimedian Principle as a method to calculate the volume of solids, besids of qualitatively evaluate its application relevation. The main objective is that the studants can master this principle as a alternative method to calculate the volume of phisycal objects, including the ones that are present in their day-life. Moreover, studants should be able to not just calculate the volume of geometric solids, but, also, throght the Arquimedian Principle, stipulate the volume of any objects they wish to. The developing of these activities permeates interdisciplinarity, the use of concret material and the application of questionarities. As an outcome, it's expected that the studants take ownership of the Arquimedian Principle, reframing, throght it, their knowloge about volume of Geometric Solids.

Keywords: Volume. Arquimedian Principle. Geometric Solids.

1 Introdução

Em épocas remotas, mesmo antes da concepção de civilização e escrita, processos simples de contagem já se faziam presentes e auxiliavam nossos antepassados em seu cotidiano nos mais diversos problemas práticos (MOL, 2013, p. 13), principalmente no que tangia a quantificação de objetos, plantações, gado e propriedades. De fato, a Matemática está sempre presente no dia a dia, servindo como auxílio tanto para quantificar, mensurar, nas finanças, no entendimento da natureza e seus fenômenos quanto, também, como uma forma de organização social (ROSSETTO, 2013, p. 11).

A Geometria em si é, por definição, uma das áreas menos abstratas da Matemática, isto porque, diferentemente da Álgebra, Estatística e do Cálculo, desprende-se do campo meramente simbólico a fim de analisar as mais diversas formas concretas presentes em nosso entorno. Mais especificamente, na Geometria Construtiva[1], por exemplo, são traçadas, com exatidão e embasamento, as mais diversas figuras geométricas de forma precisa utilizando materiais concretos, isto é, régua não graduada e compasso; já a Geometria Espacial estuda inúmeras formas concretas, abordando áreas e volumes de diversos sólidos, mostrando que a Matemática não se detém apenas a teorias e simbolismos, mas, também, investiga e formula padrões úteis para a vida cotidiana.

Todavia, o modo como é introduzido a Geometria Espacial nas escolas, principalmente no cálculo do volume de sólidos, por exemplo, ainda é muito superficial, isto porque são abordados sólidos geométricos, limitando, e muito, os artifícios para um estudo profundo da realidade e suas formas que, em sua grande maioria, são irregulares[2]. De fato, em vista de sua relevância, docentes poderiam ensinar Geometria Espacial abordando objetos irregulares, tornando a Matemática mais palpável e realista.

Assim, este trabalho tem, por objetivo, apresentar uma atividade interdisciplinar simples para o cálculo do volume de um sólido qualquer através do conceito físico do Princípio de Arquimedes, auxiliando, de maneira ímpar, o estudo da Geometria Espacial. A atividade proposta ainda não foi aplicada com os estudantes devido a suspensão das aulas nas escolas motivada pela pandemia do COVID-19.

Deveras, segundo Costa e Loureiro (2017, p. 116-117), "busca-se a expressão interdisciplinaridade pela caracterização de dois movimentos dialéticos: a problematização da situação, pela qual se desvela a realidade, e a sistematização dos conhecimentos de forma integrada", o que, consequentemente, ressalta a importância de integrar o aprendizado da Geometria Espacial, problematizando o cálculo do volume de quaisquer objetos, com,

[1] Para maiores informações deste ramo da Geometria, vide a dissertação de Souza (2018), intitulada "Geometria e Números Construtíveis: História e Prática".
[2] São exemplos de sólidos irregulares parafusos, pedras e dentre outros.

neste caso, a disciplina de Física por meio da utilização do Princípio de Arquimedes.

Deseja-se avaliar alguns aspectos importantes da atividade, como, por exemplo, se os discentes já tinham algum conhecimento prévio da possibilidade de calcular o volume de quaisquer sólidos, independentemente de serem geométricos ou não, ou, ainda, se já conheciam o Princípio de Arquimedes ou algum outro método similar para o cálculo de volumes. Para isso, haverá dois questionários, um antes da apresentação da atividade e, outro, posterior objetivando avaliar qualitativamente se este trabalho foi relevante para o corpo discente. Ambos questionários foram elaborados com questões puramente discursivas, logo, enquadrando-se em uma Pesquisa Descritiva, na forma de Estudo Descritivo, uma vez que tem por fim observar, registrar e analisar a opinião dos discentes a respeito da atividade proposta, sem alteração das respostas e dados informados, e, mais, visa identificar pontos relevantes, além dos prós e contras, da aplicação da mesma (MANZATO; SANTOS, 2012, p. 4).

Em suma, nesta dissertação serão discutidos/apresentados Revisão Bibliográfica, Referencial Teórico, Fundamentação Teórica, a Apresentação da Atividade (estando englobado uma atividade complementar introdutória, os questionários e a atividade proposta em si), uma demonstração para aplicação da atividade, Considerações Finais, Referências Bibliográficas e Apêndices. Primeiramente, na Revisão Bibliográfica, serão analisados alguns estudos similares, isto é, que abordem ou explorem métodos diferenciados para o cálculo do volume de sólidos. A seguir, no Referencial Teórico, justificar-se-á as metodologias aplicadas neste trabalho. Após, Fundamentação Teórica, onde serão explorados os conceitos físico do Princípio de Arquimedes e matemático da Geometria Espacial, tratando, especificamente, da definição de área, volume, prismas e cilindros circulares.

A seguir, desenvolver-se-á a atividade começando pelo primeiro questionário, que permeará o conhecimento prévio dos discentes. Após, na atividade complementar introdutória, serão apresentados aos discentes objetos em forma de prismas, cilindros circulares e alguns sólidos irregulares. A turma irá subdividir os objetos nas três categorias determinadas previamente e, por conseguinte, será retomado como calcular o volume dos prismas e dos cilindros circulares. Depois, será descrita a atividade proposta, isto é, serão apresentados os materiais concretos: recipiente transparente em forma de prisma retangular reto não completamente preenchido com água, um copo de 200 ml (objeto irregular, porém, semelhante a um cilindro circular reto), um frasco de shampoo, uma garrafa de água de 500 ml, um recipiente com água e uma régua (para medição). Por imersão do copo no recipiente em formato de prisma, utilizar-se-á o Princípio de Arquimedes para calcular o volume do material do copo, ou melhor, pela diferença do volume de água no recipiente pós e prévio a imersão, usando a régua como instrumento de medição e, após, seu volume total (por adicionar ao volume obtido o equivalente a 200 ml). Também serão calculados o volume de outros objetos, como, por exemplo, do frasco de shampoo, da garrafa de água de 500 ml e de outros sólidos (podendo estes ser sugeridos pelos alunos) por meio deste princípio. Então, será aplicado um questionário pós-atividade com fins de investigar a contribuição da atividade e *feedback*.

Devido a pandemia de COVID-19/Coronavírus, a atividade não pôde ser aplicada em sala de aula. Todavia, elaborou-se um vídeo demonstrativo referente a aplicação da atividade, o qual pode ser acessado em um link presente no Capítulo 6 desta dissertação. Ressalta-se que serão contempladas, segundo a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), algumas das habilidades do Ensino Fundamental, todavia, estas são apenas habilidades complementares. Portanto, recomenda-se que a atividade seja aplicada, tal qual prevê a BNCC, no Ensino Médio e, ainda, em turma que esteja (ou que tenha finalizado) a competência 3 da área da Matemática (a qual incita o uso de estratégias para resolver problemas em diferentes contextos), uma vez que a habilidade atendida é a EM13MAT309 que, basicamente, consiste em “resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de áreas totais e de volumes de prismas, pirâmides e corpos redondos em situações reais [...]” (BRASIL, 2017, p. 537).

2 Revisão Bibliográfica

O objetivo desta dissertação é apresentar aos discentes um método funcional e interdisciplinar, a saber, o Princípio de Arquimedes, para calcular o volume de quaisquer sólidos, sejam estes geométricos ou irregulares. Em suma, a atividade consiste em imergir sólidos num recipiente transparente retangular (cujo volume é obtido facilmente) com água. Ao imergir, nota-se que o volume de água dentro do recipiente aumenta. Logo, pelo Princípio de Arquimedes, o volume do objeto imerso é a diferença entre o volume de água pós e prévio a imersão do objeto.

Serão analisados outros trabalhos similares ou que, pelo menos, permeiam o assunto, a fim de que seja possível observar o que outros pesquisadores propuseram no âmbito do cálculo de volumes e, ao mesmo tempo, evidenciar-se-á o diferencial desta dissertação.

Inicialmente, note que, conforme abordam Rogenski e Pedroso (2008, p. 2) em seu artigo de investigação com respeito a influência da Matemática na vida dos discentes, principalmente no que tange a Geometria, intitulado "O ensino da geometria na educação básica: Realidade e possibilidade", há uma grande dificuldade de os alunos conseguirem compreender a Geometria Espacial, pois não conseguem mentalizar propriamente os objetos geométricos. Logo, primeiramente, serão revisados alguns trabalhos que abordaram a construção geométrica de sólidos geométricos para o ensino da Geometria Espacial, após, verificar-se-á outros trabalhos que propuseram atividades que possibilitem o cálculo do volume de sólidos irregulares.

No âmbito de compreender sólidos geométricos, Vital, Martins e Souza (2016, p. 5-8) interpõem uma atividade fixação por meio da construção destes sólidos, onde os alunos podiam perceber as características dos objetos, facilitando, assim, a compreensão de vértices, arestas, ângulos, área e volume. Já Salin (2013, p. 261-274), propõe a metodologia de Resolução de Problemas e a construção de sólidos geométricos. Num primeiro momento, houve a construção de alguns objetos geométricos sem uma profunda explicação sobre suas características, logo, cabia aos alunos construir os sólidos e, através da visualização, definir conceitos sobre os sólidos. Ainda, buscou-se resolver problemas relacionados a área e volume de objetos como, por exemplo, quantas peças de lajotas são necessárias para preencher uma piscina retangular e quantos litros de água são necessários para encher a mesma. Em ressonância a atividade proposta neste TCC, Salin (2013, p. 272) comenta em sua pesquisa que "deve-se propor atividades que despertem o entusiasmo dos alunos, desenvolvendo sua capacidade de criar, atuar em conjunto, desenvolvendo seu posicionamento crítico frente às situações novas e desafiadoras". Assim, é esperado que a utilização do material concreto, associado a interdisciplinaridade, atuará positivamente no despertar de interesse dos discentes.

Todavia, os trabalhos previamente citados não incluem objetos irregulares e seus volumes em seus estudos, logo, não contemplam, de modo geral, a realidade cotidiana dos discentes que, em seu entorno, convivem com diversos sólidos. A partir de agora, portanto, serão considerados outros trabalhos que buscam métodos de cálculo de volumes de sólidos irregulares.

Nesta dissertação, propõem-se calcular o volume de sólidos imergindo-os em água, mas, imagine que ao contrário do que sugere esta dissertação, ao invés de imergir sólidos em água, poder-se-ia, inversamente, despejar água dentro de um recipiente para determinar o volume de um sólido. Este método se mostra bastante relevante, uma vez que a água, assim como outros líquidos, molda-se ao recipiente inserido e, portanto, seria possível determinar os volumes parciais de alguns sólidos como, por exemplo, o volume de troncos de pirâmides. Nesse sentido, Martinatto (2013, p. 44) aborda a inserção de água dentro de objetos geométricos, como pirâmides e prismas, para o cálculo de seus volumes, mas não discorre sobre algum método para calcular o volume de objetos irregulares. A seguir, um trecho da dissertação:

> Nessa aula, será feita a seguinte verificação da fórmula do volume da pirâmide: o professor, fazendo uso dos sólidos de acrílico (uma pirâmide com mesma base e mesma altura de um prisma) coloca água na pirâmide e passa, com o auxílio de um funil, para o prisma, mostrando (com o auxílio de uma régua) que o volume de água ficará na terça parte da altura do prisma (MARTINATTO, 2013, p. 44)

Ao passo que, em sua dissertação, Fizzon (2018, p. 43-44) cita, sucintamente, ideias para o cálculo do volume de sólidos através do Princípio de Arquimedes, todavia, a desenvolve apenas superficialmente e, além disso, não aplica nenhum artifício de análise de pesquisa (tal como o uso de questionários, por exemplo) como meio de permear o quão relevante foi a atividade para os discentes ou para fins de aprimoramento. A atividade proposta sugere:

> a) O professor traz aos alunos algum objeto que tem aparência irregular como, por exemplo, uma pedra, e pede aos alunos que deem ideias para o cálculo de volume desse, com o intuito de promover uma discussão.
>
> b) É distribuído aos grupos de alunos pelo professor um sólido, que pode ser um prisma, pirâmide ou corpo redondo, sendo ocos e sem tampa, que encontramos no dia-a-dia [sic] como um copo, uma vasilha ou pote de biscoito, juntamente com um objeto irregular como, por exemplo, uma pedra, e uma quantia de água. Com isso, pede-se aos alunos que coloquem um pouco dessa água dentro do sólido e retirem as medidas desse que acharem conveniente, como raio, largura, altura e comprimento, calculando, assim, o volume inicial dessa água posta.
>
> c) Em seguida, pede-se que eles imirjam o objeto dado e façam um procedimento similar para calcularem o volume final. Espera-se que os

> alunos constatem que o volume pedido é a diferença entre o volume final e inicial (FIZZON, 2018, p. 43-44).

Contudo, os recipientes utilizados para o cálculo do volume não eram geométricos. Por exemplo, em um dos casos foi utilizado um recipiente com base “retangular”, todavia, é perceptível que as quinas eram arredondadas o que, teoricamente, descaracteriza o formato retangular, ou seja, não podendo ser considerado o recipiente utilizado como prisma. Sabe-se que dificilmente haverá um recipiente que satisfaça, em sua plenitude, a definição de prisma, mas é necessário buscar as condições e materiais mais adequados possíveis.

Ademais, não pode-se caracterizar como trivial definir as características de sólidos irregulares através de mera observação, por isso, não optou-se por construir sólidos, como proposto por Vital, Martins e Souza (2016, p. 5-8) e Salin (2013, p. 261-274), mas, adversamente, buscou-se interagir com todo tipo de sólidos presentes no cotidiano. Além disso, note que a proposta de Martinatto (2013, p. 44), assim como muitos problemas de física e matemática nos livros didáticos, determina o cálculo do volume do interior do sólido, não considerando o volume do material da superfície, obtendo assim um valor menor do que o volume exato do objeto. Ainda, a atividade proposta por Fizzon (2018, p. 43-44) é interessante, todavia, não são abordados sólidos com características distintas entre si, já que há corpos que são compactos, outros que são abertos e outros flutuantes. Além disso, não há nenhum método de pesquisa descrito pelo autor. O presente trabalho, além de intentar a aplicação em sala de aula do Princípio de Arquimedes como ferramenta para o cálculo do volume dos mais diversos sólidos, também, propõem uma análise qualitativa através de questionários respondidos pelos discentes previa e posteriormente a aplicação, permitindo discutir o quão importante foi o desenvolvimento da atividade para o aprendizado dos discentes.

3 Referencial Teórico

A Matemática, em sua essência e origem, é estruturada em abstração, ou seja, criam-se símbolos, conceitos, estruturas e operadores objetivando modelar o palpável, ou melhor, entender a realidade concreta. Com respeito a este assunto, Oliveira e Amaral (2001) dissertam no "Neurofórum" da Revista Eletrônica de Divulgação Científica em Neurociência chamada Cérebro & Mente:

> Daí ser talvez a Matemática o exemplo ideal do 'abstracionismo', uma vez que, como regra, não estuda o mundo real, e sim modelos, que são abstrações do mundo real. Exemplificando: 'três' é uma idéia [sic] abstrata e não uma coisa concreta do mundo real. Mas 'três' é uma abstração muito útil, porque nos permite ter certeza de quanto 'três' representa e que, adicionando-se mais 'um', sempre teremos 'quatro', independentemente de estarmos nos referindo à pessoas, casas, bananas, ou a qualquer outra coisa (OLIVEIRA; AMARAL, 2001).

De fato, pode-se utilizar a simbologia abstrata da Matemática para entender o mundo concreto e, uma vez estando em abstração, faz-se possível modelar este conhecimento para criar ou aprimorar diversos objetos físicos. Portanto, para utilizar e manipular o simbolismo matemático, deve-se observar, numa tentativa de compreensão, o mundo físico e, assim, pode-se considerar para este fim a utilização de materiais concretos. Inclusive, a este respeito, a BNCC do Ensino Médio, da área da Matemática, estabelece em sua competência específica 5, a qual trata sobre investigar e estabelecer conjecturas empregando, para isso, estratégias, recursos, experimentações e diferentes tecnologias com fins de identificar, ou não, demonstrações mais formais, descreve que:

> O desenvolvimento dessa competência específica pressupõe um conjunto de habilidades voltadas às capacidades de investigação e de formulação de explicações e argumentos, que podem emergir de experiências empíricas – induções decorrentes de investigações e experimentações com materiais concretos, apoios visuais e a utilização de tecnologias digitais, por exemplo (BRASIL, 2017, p. 540).

Deveras, para fins de imergir em abstração, materiais concretos são uma forma de, preliminarmente, compreender, através da observação mesclada com a vivência de cada um, a realidade e, após a devida análise, transcrever, conceituar e modelar matematicamente o objeto de estudo. Quanto a isto, mais especificamente no que se refere ao ensino de jovens, Azevedo (1979, p. 26-27) constata um fato que perdura por mais de 40 anos, isto é, que "nada deve ser dado à criança, no campo da Matemática, sem primeiro apresentar-se a ela uma situação concreta que a leve a agir, a pensar, a experimentar, a descobrir, e daí, a mergulhar na abstração".

Assim, como a Geometria é essencialmente o estudo de formas, torna-se imprescindível que, como supracitado, sejam utilizados materiais concretos na explanação do conteúdo em sala de aula. Portanto, sem a utilização destes, restaria explicar Geometria através de fórmulas e mecanização, o que vai de encontro ao que está estabelecido na BNCC, a qual articula que “a Geometria não pode ficar reduzida a mera aplicação de fórmulas de cálculo de área e de volume” (BRASIL, 2017, p. 272). Ainda, do ponto de vista de Rogenski e Pedroso (2008, p. 2), “memorizar” fórmulas e procedimentos dificulta o aprendizado, segue:

> Tomando-se por base as experiências da prática pedagógica, verifica-se a dificuldade dos alunos de Ensino Médio quando se trata da Geometria Espacial, com relação à visualização, conhecimentos básicos da geometria plana e nas relações existentes entre as formas. Quando o aluno se depara com cálculos de área e volume, o entendimento torna-se ainda mais complicado, realiza-os por mecanização, não entendendo a aplicação em novas situações (ROGENSKI; PEDROSO, 2008, p. 2).

Portanto, o material concreto não somente contribui para a não-mecanização dos processos de aprendizagem, mas, também, conforme Franco e Pereira (2013, p. 1-2), viabiliza articular a transição dos sólidos presentes no mundo físico para o campo abstrato, ou vice-versa, havendo, assim, uma analogia lógica para o entendimento da Geometria.

Não obstante, Tizuko Kishimoto, professora titular na USP (Universidade de São Paulo), destaca que trabalhar com materiais didáticos diferenciados, tais que proporcionem aos discentes explorar seus campos sensoriais, como visual, auditivo, térmico e, ainda, que os dê noções de forma, dimensão e peso, por exemplo, resultam em um aprendizado mais descontraído e construtivo (KISHIMOTO, 2001, p. 183). Assim sendo, escolheu-se utilizar materiais concretos de fácil obtenção para que tanto docentes quanto discentes possam reproduzir esta atividade. Os materiais são uma régua graduada, água, objetos quaisquer que se deseja calcular seus volumes, um recipiente em um formato geométrico conhecido com tamanho suficiente para que caibam os objetos e que, outrossim, não transborde a água, lousa e giz/caneta. Claro, caso o docente deseje aplicar ou o discente replicar a atividade fora do ambiente escolar, podem substituir a lousa por um caderno.

Apesar de todas benéfices que o uso do material concreto proporciona, simplesmente apresentar a atividade ao discente sem que haja uma interação pode não ser nem prazeroso e nem tão didático. Conforme Daher (2008, p. 11), o docente deve agir para que o discente não somente participe, mas que, mais, construa, por meio da observação da problemática ao qual lhe foi apresentada pelo docente e com base na sua experiência de vida (acadêmicos/matemáticos ou não), um conceito próprio e significativo. A autora comenta:

> O exercício da docência deve formar um sujeito capaz de ter história própria, e não história copiada sendo uma sobra de outros, tendo o

> conhecimento como cooperação, criatividade e criticidade, fomentando a liberdade para interferir e transformar, tornando-se protagonista da sua aprendizagem (DAHER, 2008, p. 11).

Logo, para exatamente fomentar o discente em sua aprendizagem e, também, para que seja viável pôr em prática a atividade proposta nesta dissertação, será necessário interdisciplinar o conhecimento geométrico a um conceito físico importantíssimo, isto é, o Princípio de Arquimedes. Em vista disto, tal fusão entre disciplinas não só contribui para um melhor aprendizado, mas, ainda, embasado em Lago, Araujo e Silva (2015, p. 53), torna o discente mais ativo e socialmente articulado.

De fato, a própria BNCC salienta a importância de que o discente consiga “explorar fenômenos da vida cotidiana que evidenciem propriedades físicas dos materiais” (BRASIL, 2017, p. 341). Portanto, entrelaçar conceitos matemáticos com fenômenos experimentais físicos tende a contribuir significativamente para o aprendizado dos discentes. Em sua continuidade, a BNCC, ao redigir sobre a progressão das aprendizagens do Ensino Fundamental para o Ensino Médio, pondera que “também devem construir uma visão mais integrada da Matemática, da Matemática com outras áreas do conhecimento e da aplicação da Matemática à realidade” (BRASIL, 2017, p. 471), ou seja, evidenciando que há a necessidade de interdisciplinar a Matemática com outras ciências e relacioná-la com a realidade.

Considerando o que já fora dito, surge a necessidade de aplicar questionários com fins de sondar tanto a compreensão prévia dos alunos quanto o que fora aprendido por meio da atividade aplicada. Optou-se por utilizar esta ferramenta pois, conforme Gray (2012, p. 274), este método é um dos mais utilizados por permitir uma abordagem analítica com relação aos dados da pesquisa. Prosseguindo, Gray (2012, p. 275) discorre sobre alguns outros fatores que tornam o uso dos questionários uma boa escolha, como, por exemplo:

- “Eles têm baixo custo em termos de tempo e dinheiro. Ao contrário de, digamos, as entrevistas, os questionários podem ser enviados a centenas, ou mesmo milhares, de respondentes por um custo relativamente baixo”;
- “Há um influxo de dados rápido, de muitas pessoas”;
- “Os respondentes podem completar o questionário em um momento ou lugar que lhes seja conveniente, ao contrário das entrevistas, em que pode ser difícil encontrar horários para se reunir com o entrevistado”;
- “A análise de dados de perguntas fechadas é relativamente simples, e as perguntas podem ser codificadas rapidamente”;
- “O anonimato dos respondentes pode ser garantido”;

- "Há falta de viés de entrevistador. Há evidências de que diferentes entrevistadores obtêm respostas distintas, pela forma como dão ênfase diferenciada a palavras e por causa das diferentes perguntas de aprofundamento".

Não obstante, Mielzynska (1998, p. 1) explica que "a crescente popularidade de questionários explica-se pelo fato de que a teoria da amostragem de tratamento dos dados modernos permite generalizações bastante seguras com base em amostras relativamente pequena". Além de todos os pontos já considerados, vale salientar que os questionários também contribuem como *feedback* para o aprimoramento dos mesmos em futuras aplicações similares ou, ainda, podem servir como base para outros estudos. Neste sentido, é digno explicitar o que fora ressaltado por Amaro, Povoa e Macedo (2005, p. 3), segue:

> Um questionário é extremamente útil quando um investigador pretende recolher informação sobre um determinado tema. Deste modo, através da aplicação de um questionário a um público-alvo constituído, por exemplo, de alunos, é possível recolher informações que permitam conhecer melhor as suas lacunas, bem como melhorar as metodologias de ensino podendo, deste modo, individualizar o ensino quando necessário (AMARO; POVOA; MACEDO, 2005, p. 3).

Ademais, vale, ainda, explicitar que este trabalho é consoante ao texto da BNCC, portanto, conforme descrito na mesma, recomenda-se aplicar esta atividade (relembrando que a mesma promove a utilização de uma nova estratégia para o cálculo do volume de sólidos diversos) no Ensino Médio, em turmas que estejam (ou que já completaram) a competência 3, onde prevê "utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos" (BRASIL, 2017, p. 535). Nesta competência, a habilidade compreendida é a EM13MAT309 (BRASIL, 2017, p. 537), segue:

> Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de áreas totais e de volumes de prismas, pirâmides e corpos redondos em situações reais (como o cálculo do gasto de material para revestimento ou pinturas de objetos cujos formatos sejam composições dos sólidos estudados), com ou sem apoio de tecnologias digitais (BRASIL, 2017, p. 537).

Outrossim, a atividade também permeia algumas habilidades presentes no Ensino Fundamental. É digno de nota que conseguir revisitar tais habilidades é de suma importância, uma vez que, no Ensino Médio, "a BNCC da área de Matemática e suas Tecnologias propõe a consolidação, a ampliação e o aprofundamento das aprendizagens essenciais desenvolvidas no Ensino Fundamental" (BRASIL, 2017, p. 527), logo, pode-se, sim, não somente abordar tais habilidades quando possível, mas, mais, aprofundá-las, pondo "em jogo, de modo mais inter-relacionado, os conhecimentos já explorados na etapa anterior, a fim de possibilitar que os estudantes construam uma visão mais integrada da

Matemática ainda na perspectiva de sua aplicação à realidade." (BRASIL, 2017, p. 527). Assim, as habilidades do Ensino Fundamental contempladas são:

- (EF07MA30) - Resolver e elaborar problemas de cálculo de medida do volume de blocos retangulares, envolvendo as unidades usuais (metro cúbico, decímetro cúbico e centímetro cúbico) (BRASIL, 2017, p. 309);
- (EF08MA21) - Resolver e elaborar problemas que envolvam o cálculo do volume de recipiente cujo formato é o de um bloco retangular (BRASIL, 2017, p. 315);
- (EF09MA19) - Resolver e elaborar problemas que envolvam medidas de volumes de prismas e de cilindros retos, inclusive com uso de expressões de cálculo, em situações cotidianas (BRASIL, 2017, p. 319);
- (EF05CI01) - Explorar fenômenos da vida cotidiana que evidenciem propriedades físicas dos materiais – como densidade, condutibilidade térmica e elétrica, respostas a forças magnéticas, solubilidade, respostas a forças mecânicas, entre outras (BRASIL, 2017, p. 341).

Por fim, o protagonismo no aprender associado tanto a utilização do material concreto quanto a implementação da interdisciplinaridade convidam o discente, através da Matemática, a compreender o mundo em que vive e suas formas e, consequentemente, o prepara e qualifica para sua vida em sociedade, o que vai ao encontro com Alves (2009, p. 71), que conclui: "A educação não se limita ao ensino-aprendizagem de um conjunto de conteúdos escolares, é mais ampla e implica o ensino e a aprendizagem para a vida; implica ensinar a criança a aprender a viver. É antes um processo civilizatório" (ALVES, 2009, p. 71). No próximo capítulo está a Fundamentação Matemática necessária para o desenvolvimento da atividade proposta.

4 Fundamentação Matemática

Este capítulo objetiva explicitar brevemente os conceitos matemáticos e/ou físicos que estão presentes nesta dissertação, de modo que qualquer leitor possa compreender e reproduzir este trabalho. Assim, considerar-se-ão os conceitos básicos do Princípio de Arquimedes e de Geometria Espacial, prismas e cilindros circulares.

4.1 Princípio de Arquimedes

O princípio de Arquimedes consiste no estudo do acréscimo do volume de líquidos após imersão de sólidos em seu meio. Experimentalmente, é possível verificar que quando um corpo é imergido em um líquido, o volume do líquido aumenta. Quanto a este princípio, Assis (1996, p. 71), em sua publicação para Revista da Sociedade Brasileira de História da Ciência, destaca um trecho do livro "The Works of Archimedes", o qual descreve detalhes do que fora observado por Arquimedes sobre este fenômeno. Segue:

> Embora Arquimedes tenha descoberto muitas coisas curiosas que demonstram grande inteligência, aquela que vou mencionar é a mais extraordinária. Quando obteve o poder real em Siracusa, Hierão mandou, devido a uma afortunada mudança em sua situação, que uma coroa votiva de ouro fosse colocada em um certo templo para os deuses imortais, que fosse feita de grande valor, e designou para este fim um peso apropriado do metal para o fabricante. Este, em tempo devido, apresentou o trabalho ao rei, lindamente forjado; e o peso parecia corresponder com aquele do ouro que havia sido designado para isto. Mas ao circular um rumor de que parte do ouro havia sido retirada, e que a quantidade que faltava havia sido completada com prata, Hierão ficou indignado com a fraude e, sem saber o método pelo qual o roubo poderia ser detectado, solicitou que Arquimedes desse sua atenção ao problema. Encarregado deste assunto, ele foi por acaso a um banho, e ao entrar na banheira percebeu que na mesma proporção em que seu corpo afundava, saía água do recipiente. De onde, compreendendo o método a ser adotado para a solução da proposição, ele o perseguiu persistentemente no mesmo instante, saiu alegre do banho e, retornando nu para casa, gritou em voz alta que havia encontrado o que estava procurando, pois continuou exclamando, eureca, eureca (encontrei, encontrei) (ASSIS, 1996, p. 71).

Na Figura 1, tem-se a ilustração de Arquimedes na banheira, apercebendo-se quanto ao fenômeno do acréscimo do volume de água ao imergir seu corpo.

Figura 1 – Ilustração de Arquimedes na banheira.

Fonte: Blogspot Ejemplo Sencillo[3]

Em outras palavras, a água que transbordava da banheira correspondia ao exato volume do corpo que estava sendo imergido. Assim sendo, Arquimedes poderia encontrar o volume da coroa por a imergir em água e, pesando sua massa, poderia descobrir sua densidade por dividir a massa da coroa pelo seu volume. Ora, se a densidade obtida fosse aproximadamente 19,3 g/cm^3, que é a densidade do ouro puro em temperatura ambiente, seria possível concluir, então, que a coroa era completamente de ouro, sem acréscimo de prata.

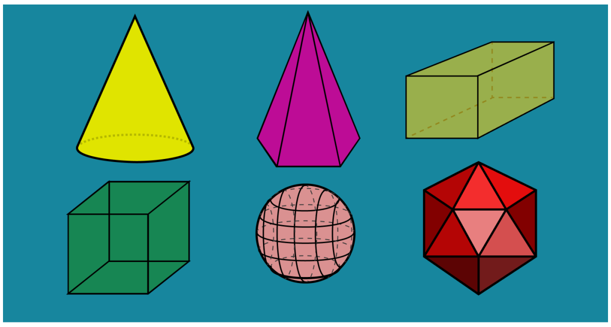
Em suma, para quaisquer objetos, a diferença entre o volume final e inicial do líquido (após e antes da imersão, respectivamente), consiste no volume do sólido imerso.

4.2 Geometria Espacial

A Geometria Espacial é o campo da Matemática onde são estudadas as características de sólidos tridimensionais, além de considerar o cálculo de seus volumes e áreas. Na Figura 2, da esquerda para direita e de cima para baixo, podemos ver alguns exemplos de sólidos estudados na Geometria Espacial, isto é, cones, pirâmides, prismas, cubos, esferas e poliedros. Neste trabalho, especificamente, será abordado o cálculo do volume de prismas retangulares (recipiente) e de cilindros circulares retos (copo, garrafa de água de 500 ml e frasco de shampoo).

[3] Disponível em: <https://unejemplosencillo.blogspot.com/2019/02/principio-de-arquimedes-ejemplo-de-la.html>. Acesso em: 13 de junho de 2020

Figura 2 – Representação de alguns sólidos estudados na Geometria Espacial.



Fonte: Site Matemática Básica[4]

4.2.1 Área

A área de uma figura plana é um número real que expressa o espaço ocupado por esta figura num plano não limitado. De fato, conforme Imenes e Lellis (2012, p. 11), livro didático do 6º ano do Ensino Fundamental, define como área "a medida de uma superfície". Portanto, conseguir calcular a área de figuras planas, entre elas triângulos, quadrados, hexágonos e círculos, respectivamente representados da direita para esquerda e de cima para baixo na Figura 3, é, certamente, de suma importância. Por conseguinte, imagine que alguém irá comprar lajotas para seu imóvel, assim, esta pessoa não desejará comprar lajotas a mais, pois sobrarão lajotas (o que significa um gasto desnecessário) ou faltarão lajotas. Assim sendo, caso esta pessoa consiga calcular a área do chão de seu imóvel e a área de cada lajota, então, ao calcular, respectivamente, o quociente destes resultados, poderá saber quantas lajotas deverão ser compradas, sem que hajam excessos nem desperdícios. Este é apenas um exemplo dentre as inúmeras situações cotidianas que envolvem áreas de figuras planas. Além disso, quando trata-se de objetos geométricos, por exemplo, é possível formular relações entre a área de superfície e seu volume.

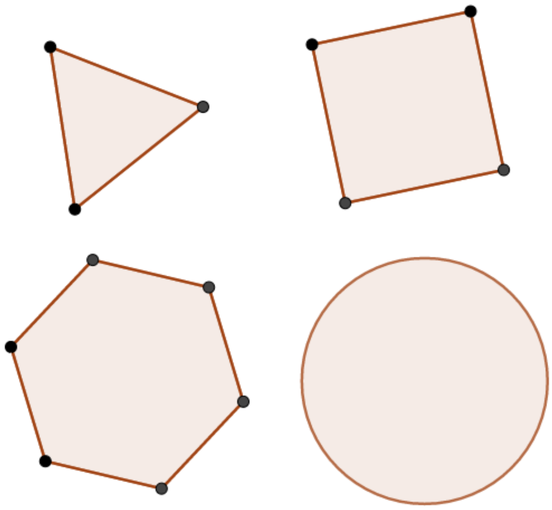
4.2.2 Volume

O volume de um sólido remete a ideia de quanto espaço certo objeto ocupa no mundo físico. Deveras, conforme descrito no livro Elementos de Geometria de Costa et al. (2012, p. 150), o volume de um sólido qualquer pode ser representado por um número real positivo, segue:

> O volume de um sólido é um número real positivo associado a ele tal que: 1) sólidos congruentes têm o mesmo volume; 2) se um sólido S é a reunião de dois sólidos S_1 e S_2 que não têm pontos interiores comuns, então o volume de S é a soma dos volumes de S_1 com S_2. (COSTA et al., 2012, p. 153).

[4] Disponível em: <https://matematicabasica.net/geometria-espacial>. Acesso em: 13 de junho de 2020

Figura 3 – Superfícies planas construídas no GeoGebra



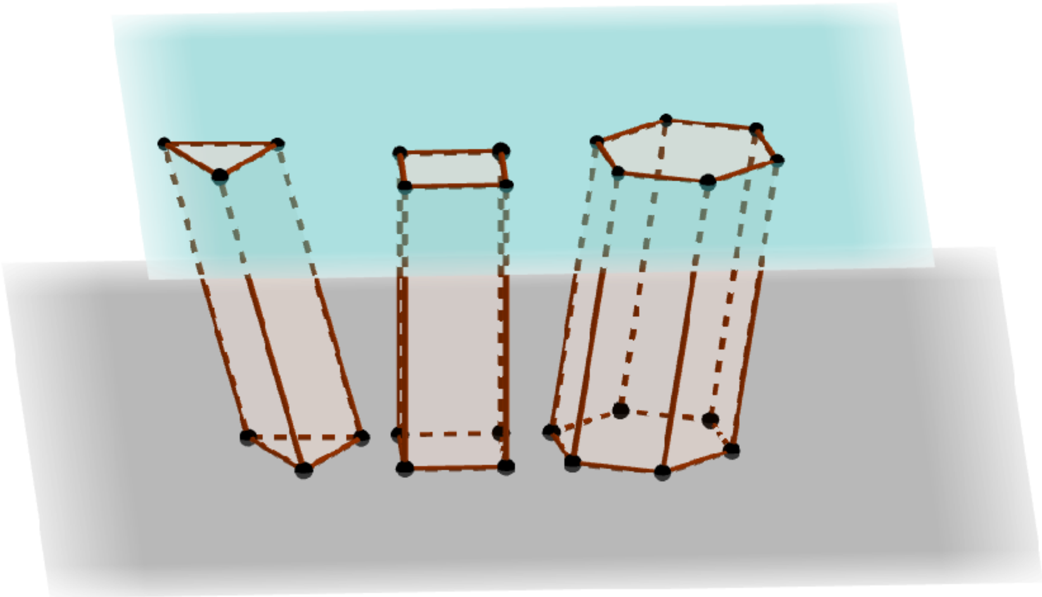
Fonte: Próprio autor

Não obstante, é de grande auxílio dominar o cálculo do volume de objetos, sendo estes geométricos e irregulares, uma vez que diversas situações do cotidiano exigem este conhecimento geométrico espacial. De fato, saber quantos tijolos cabem dentro de um veículo ou quanta água é necessária para encher certo reservatório são exemplos práticos do uso do volume.

4.2.3 Prismas

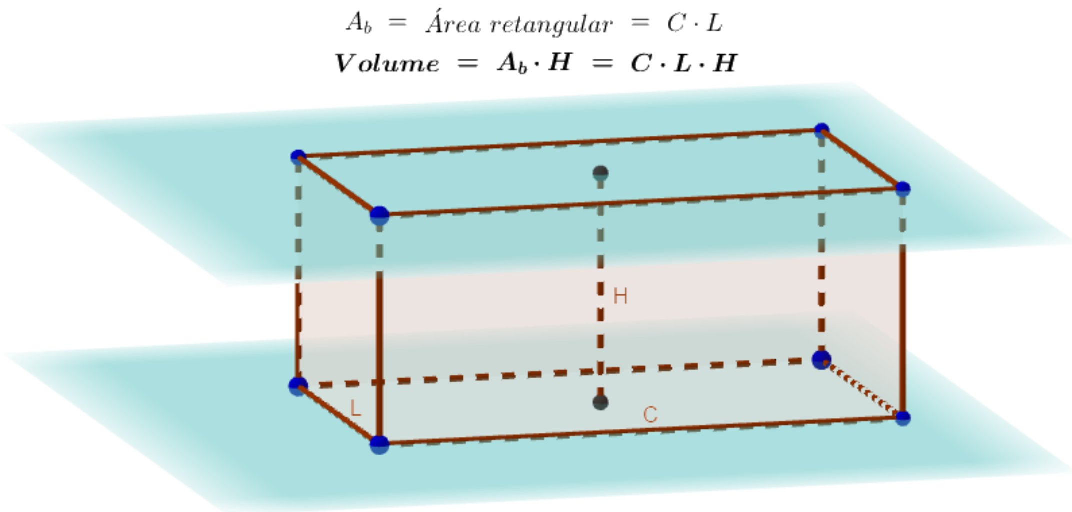
O livro Elementos de Geometria (COSTA et al., 2012, p. 150), consoante a representação na Figura 4, define que "dados os planos α e β distintos e paralelos, o polígono $A_1A_2...A_n$ em α e o ponto B_1 em β, obtêm-se $B_2, B_3, ..., B_n$ em β tais que $A_1B_1 \| A_2B_2 \| ... \| A_nB_n$. Os pontos $A_1, B_1, A_2, B_2, ...A_n, B_n$ são vértices de um poliedro denominado prisma.". Logo, o volume de um prisma qualquer pode ser obtido pela multiplicação da área da base por sua altura (COSTA et al., 2012, p. 155). Ainda, como exemplo, note a representação do cálculo do volume de um prisma retangular conforme Figura 5. É digno de nota que as letras "C", "L", "H" e "A_b" são variáveis que representam, respectivamente, o comprimento, a largura, a altura e a área da base do prisma retangular. Ainda, note que na parte superior da figura está a fórmula para o cálculo da área da base e, na parte inferior desta, a fórmula para o cálculo do volume do prisma retangular.

Figura 4 – Prismas triangular oblíquo, quadrangular reto e hexagonal oblíquo construídos no software GeoGebra



Fonte: Próprio autor

Figura 5 – Prisma retangular reto construído no GeoGebra.



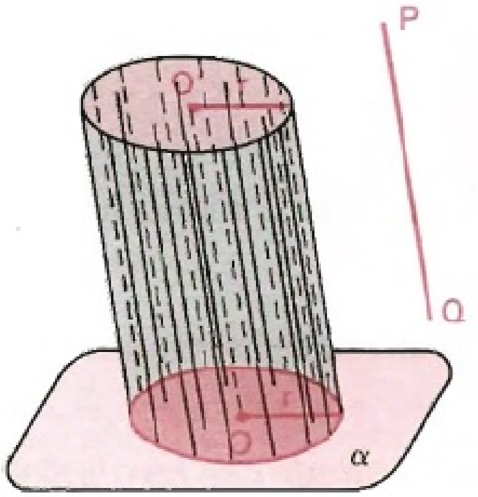
Fonte: Próprio autor

4.2.4 Cilindros Circulares

Conforme descrito na 5ª edição do livro Fundamentos de Matemática Elementar de Dolce e Pompeo (1993, p. 127), podemos ilustrar, tal qual representado na Figura 6, e definir cilindro circular da seguinte forma:

> Considere um círculo (região circular) de centro O e raio r, situado num plano α, e um segmento de reta $\overline{PQ}$, não nulo, não paralelo e não contido em α. Chama-se *cilindro circular* ou *cilindro* à reunião dos segmentos congruentes e paralelos a $\overline{PQ}$, com uma extremidade nos ponto do círculo e situados num mesmo semi-espaço dos determinados por α (DOLCE; POMPEO, 1993, p. 127).

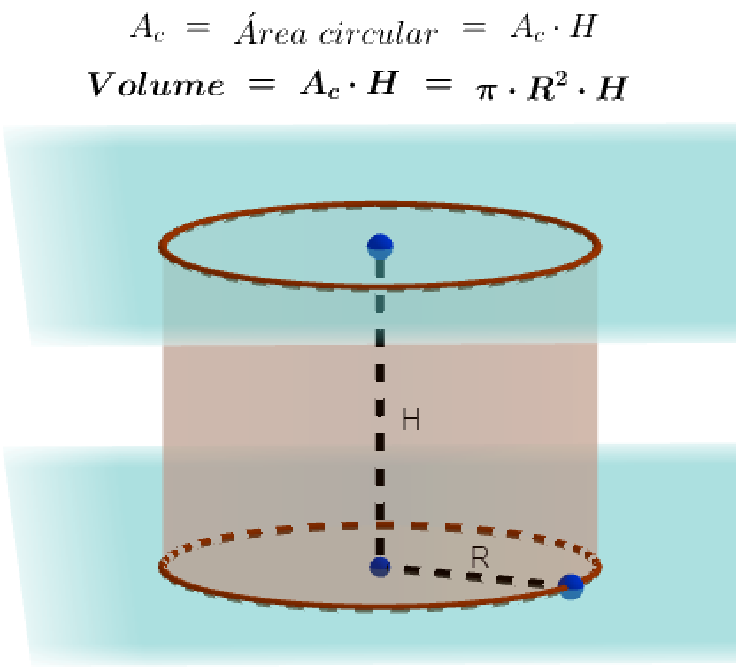
Figura 6 – Representação de um cilindro circular.



Fonte: Livro Elementos de Matemática de Dolce e Pompeo (1993, p. 217)

Ainda, o volume de um cilindro circular qualquer pode ser obtido pela multiplicação da área da base por sua altura (COSTA et al., 2012, p. 169), conforme Figura 7. Nesta figura, as letras "R" e "H" representam o raio do círculo (base do cilindro) e a altura do cilindro, respectivamente. Na parte superior da figura está descrito a fórmula da área da base circular, representada por "A_c", e, abaixo desta, a fórmula para o cálculo do volume do cilindro

Figura 7 – Cilindro circular reto construído no software GeoGebra.



Fonte: Próprio autor

5 Desenvolvendo a Atividade

Neste capítulo, inicialmente, tem-se um questionário prévio a atividade principal, o qual objetiva analisar o conhecimento dos discentes anterior a aplicação da atividade. Após, será desenvolvida a atividade em si, isto é, apresentar o Princípio de Arquimedes como ferramenta para o cálculo do volume de quaisquer sólidos. Por fim, aplicar-se-á outro questionário para investigar se a atividade contribuiu para o aprendizado dos alunos e, também, servirá como um *feedback* para possíveis aprimoramentos. É digno de nota que os questionários pré e pós atividade na forma para impressão estão, respectivamente, no Apêndice A e Apêndice B. Já as Seções 5.1 e 5.3 deste capítulo tratam especificamente sobre os questionários, juntamente com a motivação/justificativa de cada questionamento.

5.1 Consideração do Questionário Prévio a Aplicação da Atividade

Nesta seção, conforme previamente supracitado na descrição do Capítulo 5, são apresentadas as perguntas que estão presentes no questionário prévio a aplicação da atividade e, além disso, a motivação para cada uma delas. O objetivo central é investigar o conhecimento atual dos discentes para que, através de comparativos com o questionário pós atividade, consiga-se identificar sinais de que a atividade contribuiu positivamente para a formação do aluno.

1. Você sabe o que é um sólido irregular? Cite 3 exemplos. - Busca-se identificar se os discentes reconhecem os sólidos irregulares. O objetivo é verificar se o ensino de Geometria Espacial, prévio a aplicação deste trabalho, os possibilitou a não somente ter ciência dos sólidos geométricos, mas, também, de objetos irregulares irregulares.

2. Você sabe calcular o volume de alguns sólidos? Se sim, quais? - Deseja-se que os alunos citem alguns sólidos geométricos cujo volume é possível de ser calculado através de formulários (ou por quaisquer outros métodos). Esta pergunta objetiva identificar se os discentes têm algum conhecimento prévio de Geometria Espacial a ponto de conseguir citar alguns exemplos de sólidos geométricos.

3. Você acredita que o conteúdo de Geometria que lhe foi apresentado em sala de aula baseia-se em decorar fórmulas e as aplicar, sem haver um raciocínio aprofundado? Comente. - Procura-se, neste questionamento, a opinião sincera do discente sobre a metodologia de ensino que fora utilizada no âmbito escolar no ensino da Geometria Espacial. Através deste questionamento, pode-se discutir se é atrativa a atual metodologia e se, na opinião dos alunos, a mesma é satisfatória.

4. Já lhe foi apresentado alguma atividade interdisciplinar (atividade que associa duas ou mais disciplinas) com respeito a Geometria? Se sim, qual? - Busca-se informações sobre alguma atividade interdisciplinar em associação com a Geometria. O objetivo é identificar se há, ou não, atividades interdisciplinares no âmbito da Geometria, uma vez que a correlação com outras disciplinas pode auxiliar na formação e fixação dos conceitos geométricos.

5. Você conhece algum método para calcular o volume de sólidos quaisquer? Se sim, qual? - Deseja-se informações quanto a formação do conhecimento geométrico dos discentes, mais especificamente com relação ao cálculo do volume de quaisquer sólidos. Esta pergunta tem a finalidade de identificar se os alunos têm conhecimento de algum método que os possibilite calcular o volume de objetos quaisquer, abrindo margem, inclusive, para verificar se os discentes já conhecem a funcionalidade do Princípio de Arquimedes, no qual baseia-se a atividade.

5.2 Princípio de Arquimedes - Auxílio para o Cálculo do Volume de Sólidos Quaisquer

Primeiramente, serão listados os dados da atividade, isto é, público-alvo, duração, habilidades da BNCC permeadas e trabalhadas, os pré-requisitos, os objetivos geral e específicos e os materiais que serão utilizados. Após, abordar-se-á uma atividade introdutória com fins de revisão. A seguir, será desenvolvida a atividade em si, ou seja, apresentar o Princípio de Arquimedes como ferramenta para o cálculo de quaisquer sólidos e, por fim, haverá a proposta para o fechamento da atividade.

- **Público-alvo**: 3º ano do Ensino Médio;
- **Duração**: 90 minutos;
- **Habilidades da BNCC permeadas**: EF07MA30, EF08MA21, EF09MA19 e EF05CI01;
- **Habilidade da BNCC trabalhada**: EM13MAT309;
- **Pré-requisitos**: saber identificar e calcular os volumes de prismas e cilindros circulares;
- **Objetivo Geral**: compreensão de um método alternativo para o cálculo do volume de sólidos;
- **Objetivos Específicos**: identificar a diferença entre sólidos geométricos e irregulares, calcular o volume de quaisquer sólidos (geométricos e irregulares) e aplicar o Princípio de Arquimedes;

- **Materiais Utilizados**: régua, copo de 200 ml, frasco de shampoo, garrafa de água de 500 ml, recipiente qualquer com água e um recipiente em forma de prisma transparente[5];

- **Atividade Introdutória**: os discentes precisarão saber diferenciar os sólidos geométricos e irregulares e, ainda, relembrar de algumas fórmulas de Geometria Espacial para o cálculo do volume de sólidos geométricos. Portanto, iniciar-se-á a aula com uma atividade simples de reconhecimento de sólidos, onde, primeiramente, serão apresentados visualmente objetos em forma de prismas, cilíndricos e irregulares. Após, os alunos deverão organizar todos os objetos disponíveis dentre as três categorias, isto é, prismas, cilindros e irregulares, caracterizando-os, subsequentemente, cada objeto de acordo com sua categoria, diferenciando uma das outras. Por fim, será relembrado como calcular o volume de objetos destas categorias, neste caso, especificamente dos prismas e dos cilindros circulares retos, uma vez que, provavelmente, os discentes desconheçam um método para o cálculo de objetos geométricos irregulares.

- **Apresentação da Atividade**: através do Princípio de Arquimedes será utilizado um recipiente retangular vazio e, em seguida, enche-se o mesmo com água, não o completando, calculando, assim, o volume do líquido que está dentro do recipiente. Após, imerge-se um sólido, neste caso um copo de 200 ml, calculando o novo volume da água. Assim, determina-se o volume do copo pela subtração do volume final (com o objeto imergido) pelo volume inicial (sem o objeto), somado a 200 ml (referente a parcela de água que adentra ao interior do copo)[6]. Deve-se, também, fazer o comparativo das unidades de medida centímetros cúbicos e mililitros, pois os cálculos serão feitos com a medida da régua, isto é, em centímetros, logo, obtém-se um resultado em cm^3, todavia, os objetos que serão imergidos têm seu volume em ml. É importante destacar, portanto, que $1cm^3$ equivale $1ml$, não havendo necessidade de efetuar conversões;

- **Desenvolvimento da Atividade**: no começo da atividade, será questionado aos alunos se teriam alguma ideia de como calcular o volume de um copo comum. Refletir-se-á se haveria a possibilidade de ter sido utilizada a fórmula de cálculo do volume de um cilindro circular reto. Então, será solicitado a um dos alunos que colete as medidas do copo com uma régua. Juntamente com a turma, calcular-se-á o volume, anotando-o.

[5] Todos materiais listados necessitam ser fornecidos pelo docente.

[6] Objetos abertos, como o copo, podem ser imersos com água em seu interior, assim, o volume total do sólido será igual ao volume final menos inicial de água que está dentro do recipiente em formato de prisma, não sendo necessário acrescentar ao resultado o volume correspondente a capacidade interna do objeto.

Posteriormente, será levado à frente da sala um recipiente em forma de prisma retangular e, em seguida, será solicitado a outro discente que despeje água (com ajuda de um recipiente qualquer) neste recipiente, não sendo necessário despejar toda a água, de forma que o recipiente não fique cheio.

Após, será abordado o conceito do cálculo de volume de sólidos através do Princípio de Arquimedes, isto é, que para obter o volume de qualquer sólido desejado, basta calcular a diferença entre os volumes da água posterior a imersão do sólido desejado e do volume de água anterior a imersão. Assim, será questionado aos alunos como seria possível calcular o volume de água que está dentro do recipiente e, juntos, concluir-se-á que o líquido tem formato de um prisma retangular, assim, outro aluno voluntário virá à frente da classe e fornecerá aos seus colegas as medidas do volume da água que está dentro do recipiente. Logo, será apontado o volume de água obtido.

Em seguida, outro aluno irá mergulhar o copo de 200 ml dentro do recipiente e irá apontar as novas medidas do líquido.

Ora, raciocinando junto aos alunos, chegar-se-á à conclusão que parte do volume do copo será o volume da água com o objeto emergido menos o volume da água sem o objeto. Também, deve-se refletir com os discentes que o volume obtido é parcial, uma vez que quando o copo é imergido, há uma parcela de água que adentra o copo, significando que o volume total do copo é a diferença entre os volumes final e inicial da água que está no recipiente mais a capacidade de volume interna copo, isto é, 200 ml. Assim, por fim, haverá a comparação deste volume calculado com o volume obtido preteritalmente do copo, o qual fora calculado pela fórmula do volume de um cilindro circular reto.

Após, será questionado aos discentes:

- Por que os resultados diferiram?
- Qual dos volumes calculados se aproxima mais do volume correto do copo?
- Poder-se-ia utilizar o sistema de imersão para qualquer tipo de sólido, tanto geométricos quanto irregulares?
- Como funciona o cálculo de volume de sólidos com comportamentos ou características distintas quando imersos, por exemplo, quais são as diferenças no cálculo do volume de um sólido compacto (como uma pedra), de um sólido aberto (como um copo) e de um flutuante (como uma latinha de refrigerante)?
- O material do copo e a espessura influenciam no experimento? Se sim, como?

  - Existe uma margem de erro no experimento? Se sim, o que seria um erro considerado razoável?[7]

- **Fechamento da Atividade**: Após discutir sobre os questionamentos supracitados e estabelecidas as conclusões, serão calculados pelos discentes (com auxílio do docente) os volumes do frasco de shampoo e da garrafa de água pelo Princípio de Arquimedes, com fins de reflexão e fixação. A seguir, será respondido o questionário (próxima seção) e, por fim, será escolhido pela turma um outro objeto irregular qualquer para imergir no recipiente e, portanto, calculado seu volume utilizando a mesma metodologia e, assim, sucessivamente, até o término da aula.

  O docente, que supervisionará toda atividade, não irá demonstrar, afirmar e/ou concluir algo, apenas irá fomentar o processo criativo, instigando os alunos, a fim de que cheguem a um consenso. Após, atestará se o consenso geral da turma está correto e, caso não esteja, refletirá, juntamente com a classe, sobre os possíveis erros, induzindo os próprios discentes a enxergarem e, consequentemente, refazerem as devidas correções, até que seja obtido o resultado esperado.

5.3 Consideração do Questionário Posterior a Aplicação da Atividade

Nesta seção, são apresentadas as perguntas que estão presentes no questionário posterior a aplicação da atividade e, também, a motivação para cada uma delas. A finalidade deste questionário é, além de coletar dados referente a relevância da atividade para formação do discente, também, como *feedback* para futuros estudos e/ou aprimoramentos para aplicação desta atividade. Reforça-se que este questionário pode ser acessado em sua forma para impressão no Apêndice B.

1. Você sabe o que é um sólido irregular? Cite 3 exemplos. - Busca-se que os discentes respondam que sabem o que é um sólido irregular e que consigam citar três objetos que de fato são irregulares. O objetivo é que os alunos que afirmaram não saber o que é um sólido irregular ou que não souberam citar três exemplos de irregulares no questionário prévio a atividade, consigam identificar agora, ressaltando, portanto, que a atividade foi significativa.

2. Você conhece algum método para calcular o volume de quaisquer sólidos? Se sim, qual? - Busca-se que os discentes, agora, consigam responder positivamente a este

[7] Por curiosidade, segundo a Portaria INMETRO nº 248 de 17/07/2008, a margem de confiança do volume nominal de um produto comercializado, isto é, o volume do produto desconsiderando a embalagem, deve ser de 95%. Logo, o docente pode comparar o resultado obtido para verificar se o produto está de acordo com o estabelecido pelo INMETRO.

questionamento, uma vez que o Princípio de Arquimedes, que fora apresentado na atividade, é um dos possíveis métodos para o cálculo do volume de objetos quaisquer.

3. Você acredita que esta atividade utilizando material concreto (copo, água, recipiente em forma de prisma) ajudou você a compreender melhor o conteúdo? Comente. - Deseja-se que os alunos respondam positivamente a este questionamento, visto que a ideia da atividade com material concreto é de imersão, fomentando-os a um aprendizado significativo.

4. De modo geral, a atividade contribuiu para seu aprendizado de Geometria, mais especificamente, no cálculo do volume de sólidos? Se sim, de que forma? - Deseja-se que os alunos respondam que a atividade contribuiu positivamente para seu aprendizado de Geometria. Ainda, espera-se que citem o Princípio de Arquimedes como método para o cálculo do volume de sólidos quaisquer.

5. Você acredita que a atividade contribuiu para a desmecanização da Geometria, ou seja, você não usa simplesmente fórmulas “decoradas”, mas consegue refletir sobre o problema e entender o que efetivamente está sendo feito? - Em contraste com a terceira pergunta do formulário prévio a atividade, espera-se que a atividade, na opinião dos discentes, tenha contribuído para uma compreensão significativa da Geometria Espacial, desvencilhando-se de um ensino fundamentado no uso exclusivo de formulários[8].

[8] Cabe ressaltar que, neste trabalho, não objetiva-se a exclusão de fórmulas, mas, pelo contrário, almeja-se dar significado e utilidade para o uso destas.

6 Demonstração da Aplicação da Atividade

Neste último capítulo, será apresentado, através de um vídeo demonstrativo, o funcionamento da atividade. A atividade não pôde ser aplicada em sala de aula devido a pandemia global de COVID-19/Coronavírus. Portanto, elaborou-se uma simulação de como pode ser aplicada a atividade.

Inicialmente, faz-se no vídeo uma introdução de alguns pontos relevantes, mencionando desde a motivação quanto a importância da atividade. Após, introduz-se os materiais que foram utilizados na demonstração do experimento. Em seguida, reflete-se sobre como calcular o volume do sólido desejado, neste caso um copo de 200 ml. Assim, simula-se a atividade, demonstrando com detalhes seu funcionamento. Finalmente, reflete-se sobre os dados da atividade e os resultados obtidos.

Conforme foto da capa do vídeo presente na Figura 8, segue o link para o vídeo demonstrativo: <https://drive.google.com/file/d/1bT7KtOIgREfGmsl0B1Zhjr6uVyxUQmHT/view?usp=sharing>

Figura 8 – Capa do vídeo sobre a demonstração da atividade.

Fonte: Próprio autor

Cabe salientar que esta atividade foi publicada no I Encontro Nacional Online de Professores que Ensinam Matemática – I ENOPEM, o qual ocorreu do dia 16 a 19 de novembro sob a temática “BNCC em Sala de Aula na Educação Básica”. A apresentação ocorreu no dia 19/11/2020, das 10h20min às 10h40min no formato de Relato de Experiência.

7 Considerações Finais

É esperado que, como resultado, os alunos consigam compreender o Princípio de Arquimedes e que, por meio dele, possam não somente significar o conhecimento, de modo descontraído e diferenciado, de Geometria Espacial, mas, também, que consigam calcular o volume de qualquer sólido desejado (geométrico ou irregular) através de tal princípio.

Ainda, através dos dados coletados nos questionários, espera-se que seja possível a análise devida para fins de investigar um possível *deficit*[9] no ensino atual da Geometria Espacial, especificamente no que tange o cálculo do volume de sólidos (questionário prévio a aplicação da atividade, Seção 5.1) e para coletar a opinião dos alunos como *feedback* e, também, quanto a relevância da prática (questionário posterior a aplicação da atividade, Seção 5.3).

Como proposta de continuidade, pretende-se aplicar a atividade assim que retornarem as atividades presenciais nas escolas e, ainda, poder-se-á considerar o cálculo do volume dos Sólidos Arquimedianos[10] (ou semirregulares), trabalhando desde suas formas quanto propriedades, como meio de domínio da Geometria Espacial e, também, como auxílio na apresentação e/ou explanação de sólidos geométricos e irregulares. Para uma abordagem ainda mais ampla, pode-se abranger o volume dos Sólidos de Catalan, ou melhor, conforme definido por Fanti, Kodama e Necchi (2012), o volume dos poliedros que têm "como faces os polígonos, com sua região interior, cujas arestas são obtidas ligando os centros de todos os pares de faces adjacentes do poliedro inicial".

---

[9] Para fins de aprofundamento sobre um possível *deficit* no ensino da Geometria, vide os trabalhos de Tashima e Silva (2015) e Cunha (2015).

[10] Para saber mais sobre os Sólidos Arquimedianos, vide o artigo de Mohr e Britto (2016).

Referências

ALVES, F. D. *O lúdico e a educação escolarizada da criança*. São Paulo: SciELO Books, 2009. 71 p. Citado na página 19.

AMARO, A.; POVOA, A.; MACEDO, L. A arte de fazer questionários. FACULDADE DE CIÊNCIAS DA UNIVERSIDADE DO PORTO, p. 3, 2005. Citado na página 18.

ASSIS, A. K. T. Sobre os corpos flutuantes - tradução comentada de um texto de arquimedes. Revista da Sociedade Brasileira de História da Ciência, p. 71, 1996. Citado na página 20.

AZEVEDO, A. Apresentação do trabalho montessoriano. Revista de Educação & Matemática, n. 3, p. 26–27, 1979. Citado na página 15.

BRASIL. Base nacional comum curricular (BNCC). Educação é a Base. MEC/CONSED/UNDIME, p. 272, 309, 315, 319, 341, 471, 527, 535, 537, 540, 2017. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf>. Acesso em: 27/06/2020. Citado 6 vezes nas páginas 11, 15, 16, 17, 18 e 19.

COSTA, C. A.; LOUREIRO, C. F. A interdisciplinaridade em Paulo Freire: aproximações político-pedagógicas para a educação ambiental crítica. ISSN 1982-0259, Revista Katálysis vol.20 no.1, Florianópolis, p. 116–117, 2017. Citado na página 9.

COSTA, D. M. B. et al. *Elementos de Geometria*. 3. ed. [S.l.]: Universidade Federal do Paraná, Setor de Ciências Exatas, Departamento de Expressão Gráfica, 2012. 150, 153, 167, 169 p. Citado 3 vezes nas páginas 22, 23 e 25.

CUNHA, B. M. da. A geometria no contexto educacional: Sua análise através da utilização de atividade prática em sala de aula. Universidade Federal de Ouro Preto/CEAD, 2015. Citado na página 34.

DAHER, A. F. B. Aluno e professor: Protagonistas do processo de aprendizagem. Prefeitura Municipal de Campo Grande, p. 11, 2008. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 17.

DOLCE, O.; POMPEO, J. N. *Fundamentos de Matemática Elementar 10*. 5. ed. São Paulo: Atual, 1993. 217 p. Citado na página 25.

FANTI, E. de L. C.; KODAMA, H. M. Y.; NECCHI, M. A. Explorando poliedros convexos no ensino médio com e software poly. UNESP - XXIV Congresso de Iniciação Científica, p. 734, 2012. Citado na página 34.

FIZZON, L. M. O uso de jogos e material concreto no ensino de geometria espacial. p. 43–44, 2018. Citado 2 vezes nas páginas 13 e 14.

FRANCO, S.; PEREIRA, C. O estudo da geometria espacial e recursos pedagógicos manipuláveis: Uma estratégia para aguçar o interesse e a criatividade do aluno. Governo do Estado - Secretaria da Educação, Paraná, p. 1–2, 2013. Citado na página 16.

GRAY, D. E. *Pesquisa no mundo real*. [S.l.]: Ed. Porto Alegre: Penso, 2012. 274-275 p. Citado na página 17.

IMENES, L. M.; LELLIS, M. *Matemática: Imenes e Lellis*. 2. ed. São Paulo: Moderna, 2012. 277 p. Citado na página 22.

KISHIMOTO, T. M. *Jogo, brinquedo, brincadeira e a educação*. 5. ed. [S.l.]: Cortez, 2001. 183 p. Citado na página 16.

LAGO, W. L. A. do; ARAUJO, J. M.; SILVA, L. B. Interdisciplinaridade e ensino de ciências: Aspirações atuais do ensino. ISSN 1984-3879, SABERES, Natal, Rio Grande do Norte, p. 53, 2015. Citado na página 17.

MANZATO, A. J.; SANTOS, A. B. A elaboração de questionários na pesquisa quantitativa. Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Paraná, p. 4, 2012. Citado na página 10.

MARTINATTO, M. A. *Geometria Espacial no Ensino Médio: sugestões de atividades e avaliações para o conteúdo de Prismas e Pirâmides*. 44 p. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Rio Grande, 2013. Citado 2 vezes nas páginas 13 e 14.

MIELZYNSKA, J. A construção e a aplicação de questionários na pesquisa em ciências sociais. Revista do Programa de estudos pós-graduados PUCSP, São Paulo, p. 1, 1998. Citado na página 18.

MOHR, A. R. da R.; BRITTO, S. L. M. Sólidos arquimedianos: um estudo sobre truncaduras e suas construções no ensino médio. Universo Acadêmico, 2016. Citado na página 34.

MOL, R. S. Introdução à história da matemática. Belo Horizonte, p. 13, 2013. Citado na página 9.

OLIVEIRA, J. M. de; AMARAL, J. R. do. O pensamento abstrato. ***Revista Eletrônica de Divulgação Científica em Neurociência***, **Cérebro** & **Mente**. Universidade Estadual de Campinas, 2001. Disponível em: <http://www.cerebromente.org.br/n12/opiniao/pensamento.html>. Acesso em: 27/06/2020. Citado na página 15.

ROGENSKI, M. L. C.; PEDROSO, S. M. D. O ensino da geometria na educação básica: Realidade e possibilidades. p. 2, 2008. Disponível em: <http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/44-4.pdf>. Acesso em: 13/04/2020. Citado 2 vezes nas páginas 12 e 16.

ROSSETTO, H. H. P. Um resgate histÓrico: A importância da história da matemática. Medianeira, p. 11, 2013. Citado na página 9.

SALIN, E. B. Geometria espacial: A aprendizagem através da construção de sólidos geométricos e da resolução de problemas. REVEMAT. eISSN 1981-1322, p. 261–274, 2013. Citado 2 vezes nas páginas 12 e 14.

SOUZA, G. M. de. Geometria e números construtíveis: História e prática. UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE, 2018. Citado na página 9.

TASHIMA, M. M.; SILVA, A. L. da. As lacunas no ensino-aprendizagem da geometria. Universidade Estadual de Londrina, 2015. Citado na página 34.

VITAL, C.; MARTINS, E. R.; SOUZA, J. R. de. O uso de materiais concretos no ensino de geometria. Sociedade Brasileira de Educação Matemática, p. 5–8, 2016. Citado 2 vezes nas páginas 12 e 14.

A Apêndice 1 - Questionário Prévio à Atividade

Questionário Prévio a Aplicação da Atividade

Ano: ________ Turma: ________ Data: ________________

1. Você sabe o que é um sólido irregular? Cite 3 exemplos.

2. Você sabe calcular o volume de alguns sólidos? Se sim, quais?

3. Você acredita que o conteúdo de Geometria que lhe foi apresentado em sala de aula baseia-se em "decorar" fórmulas e as aplicar, sem haver um raciocínio aprofundado? Comente.

4. Já lhe foi apresentado alguma atividade interdisciplinar (atividade que associa duas ou mais disciplinas) com respeito a Geometria? Se sim, qual?

5. Você conhece algum método para calcular o volume de quaisquer sólidos? Se sim, qual?

B Apêndice 2 - Questionário Pós Atividade

Questionário Pós a Aplicação da Atividade

Ano: ______ Turma: ______ Data: __________

1. Você sabe o que é um sólido irregular? Cite 3 exemplos.

   ____
   ____
   ____
   ____

2. Você conhece algum método para calcular o volume de quaisquer sólidos? Se sim, qual?

   ____
   ____
   ____
   ____

3. Você acredita que esta atividade utilizando material concreto (copo, água, recipiente em forma de prisma) ajudou você a compreender melhor o conteúdo? Comente.

   ____
   ____
   ____
   ____

4. De modo geral, a atividade contribuiu para seu aprendizado de Geometria, mais especificamente, no cálculo do volume de sólidos? Se sim, de que forma?

   ____
   ____
   ____
   ____

5. Você acredita que a atividade contribuiu para a desmecanização da Geometria, ou seja, você não usa simplesmente fórmulas "decoradas", mas consegue refletir sobre o problema e entender o que efetivamente está sendo feito?

   ____
   ____
   ____
   ____