Marcia Falek Rocha

ESTUDO DA FUNÇÃO QUADRÁTICA: UMA PROPOSTA UTILIZANDO INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA

Rio Grande, Rio Grande do Sul, Brasil

Maio, 2021

Marcia Falek Rocha

ESTUDO DA FUNÇÃO QUADRÁTICA: UMA PROPOSTA UTILIZANDO INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA

Dissertação submetida por Marcia Falek Rocha como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre, pelo Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT junto ao Instituto de Matemática, Estatística e Física da Universidade Federal do Rio Grande.

Universidade Federal do Rio Grande - FURG

Instituto de Matemática, Estatística e Física - IMEF

Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

Orientador: Dra. Cinthya Maria Schneider Meneghetti

Rio Grande, Rio Grande do Sul, Brasil

Maio, 2021

Colaboradores

Universidade Federal do Rio Grande
http://www.furg.br

http://www.imef.furg.br

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
http://www.profmat-sbm.org.br

Sociedade Brasileira de Matemática
http://www.sbm.org.br

Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior
http://www.capes.gov.br

Ficha Catalográfica

R672e Rocha, Marcia Falek.
Estudo da função quadrática: uma proposta utilizando investigação Matemática / Marcia Falek Rocha. – 2021.
67 f.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Rio Grande – FURG, Programa de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Rio Grande/RS, 2021.
Orientadora: Dra. Cinthya Maria Schneider Meneghetti.

1. Função Quadrática 2. Investigação Matemática 3. Círculos 4. Retângulos I. Meneghetti, Cinthya Maria Schneider II. Título.

CDU 51

Catalogação na Fonte: Bibliotecário José Paulo dos Santos CRB 10/2344

Estudo da Função Quadrática: Uma Proposta Utilizando Investigação Matemática

Marcia Falek Rocha

Orientadora:

Profª. Drª. Cinthya Maria Schneider Meneghetti

Dissertação de Mestrado submetida ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovada por:

Profª. Drª. Cinthya Maria Schneider Meneghetti

Prof. Dr. Giovanni da Silva Nunes

Profª. Drª. Daiane Silva de Freitas

Rio Grande

Maio de 2021

Aos meus pais e a toda minha família por todo o apoio recebido, meu muito obrigado.
Este trabalho é dedicado a vocês.

Agradecimentos

Agradeço a Deus pelas benções recebidas de chegar até aqui.

Aos meus pais, Marlene e Henrique pela força de não deixar que eu desistisse.

A minha irmã Marlize, por toda a ajuda e por estar sempre presente quando precisei.

Aos meus filhos, Matheus e Manuela, pela compreensão das ausências e pelo afastamento temporário.

A minha avó Ignês e os demais integrantes da família, pelo apoio.

Aos meus colegas de classe e também amigos, Rafael e Maria Emília por toda a ajuda.

A minha professora e orientadora Cinthya Meneghetti, pela paciência, ajuda e toda disposição para me ajudar.

A todos os professores que contribuíram de uma forma direta ou indireta.

Por fim, meu muito obrigada, a todos que de alguma forma auxiliaram nesse percurso.

"Os sonhos não determinam o lugar em que você vai estar,
mas produzem a força necessário para tirá-lo do lugar em que está."
(Augusto Cury)

Resumo

Esse trabalho apresenta duas atividades desenvolvidas como parte da dissertação de mestrado profissional em matemática, que utilizam a investigação matemática para estudar a Função Quadrática. Na primeira atividade, o estudante deverá conjecturar quantas moedas de mesmo tamanho serão necessários para preencher um círculo (ou disco) de diâmetro dado, a partir de algumas tentativas mediadas pelo professor. Já na segunda, procura-se otimizar a área de um campo para um determinado perímetro. A fim de auxiliar no desenvolvimento das tarefas, os alunos deverão preencher tabelas conforme as orientações do professor e com os dados obtidos marcar pontos no plano cartesiano. A partir da relação do tamanho do diâmetro com o número de moedas e de posse das medidas de comprimento e área dos retângulos, espera-se que concluam que a curva que passa pelos pontos marcados a partir da situação proposta é uma parábola, gráfico de uma Função Quadrática. Além disso, com as duas atividades é possível retomar conceitos como domínio, contradomínio, imagem, propriedades do gráfico e diferenciar alguns tipos de funções: Função Afim, Exponencial e Quadrática.

Palavras-chaves: Função Quadrática; Investigação Matemática; Círculos; Retângulos.

Abstract

This work presents two activities developed as part of the professional master's thesis in mathematics, that use mathematical investigation to study the Quadratic Function. In the first activity, the student must conjecture how many coins of the same size will be needed to fill a circle (or disc) with a given diameter, based on some attempts mediated by the teacher. In the second, the aim is to optimize the area of a field for a specific perimeter. In order to assist in the development of tasks, students must complete tables according to the teacher's instructions and with the data obtained, score points in the Cartesian plane. Based on the relationship between the size of the diameter and the number of coins and possession of the measures of length and area of the rectangles, it is expected that they conclude that the curve that passes through the points marked from the proposed situation is a parable, graph of a quadratic function. In addition, with both activities, it is possible to resume concepts such as domain, counterdomain, image, graph properties and differentiate some types of functions: affine, exponential and quadratic functions.

Key-words: Quadratic function; Mathematical Investigation; Circles; Rectangles.

Lista de ilustrações

Sumário

INTRODUÇÃO

No decorrer da minha prática pedagógica, nesses 15 anos atuando na educação básica e pública, fui entendendo as dificuldades dos educandos em compreender determinados conteúdos, como por exemplo a Função Quadrática e a relação com o seu dia-a-dia. Desta maneira, as atividades aqui apresentadas, se propõem a revisar a Função Quadrática por meio da utilização da investigação matemática como metodologia de ensino, para torná-la mais atrativa e facilitar o seu entendimento.

São apresentas duas propostas de atividades, que servem para diferenciar alguns tipos de funções: Função Afim, Quadrática e Exponencial. O destaque é dado para a Função Quadrática, podendo ser omitida a discussão que envolve os demais tipos de funções, se o professor assim desejar. A proposta foi construída para ser trabalhada com os estudantes do primeiro ano do Ensino Médio, mas também pode ser utilizada como alternativa de revisão dos conteúdos mencionados ou ainda para estudantes do Ensino Superior que desejam retomar os conceitos envolvidos.

Essas atividades tem por objetivo levar o estudante a reconhecer uma Função Quadrática, por meio da utilização de material concreto. Além disso, permite que sejam retomados os conteúdos de Função Afim, Resolução de Sistemas, Radicais e, se o professor optar, Função Exponencial, além de uma discussão aprofundada sobre domínio, contradomínio, imagem e propriedades do gráfico das funções como por exemplo o crescimento e decrescimento.

As atividades foram pensadas motivadas pela questão: Como podemos reconhecer a Função Quadrática numa situação problema?

Para construir as atividades propostas foram utilizados recursos como material concreto, a fim de tornar o processo de ensino aprendizagem lúdico. O registro das informações obtidas em tabelas e a construção de gráficos serve para inspirar nos estudantes a conjectura e a justificativa das suas conclusões. O uso de tabelas permitiu organizar e sistematizar os resultados obtidos e uma construção do gráfico que destaca a relação entre os diferentes modos de representação (algébrico e geométrico) das informações obtidas. Os estudantes são incentivados a esboçar curvas e se questionar sobre a existência e definição de uma função cujo gráfico poderia ser a curva esboçada. É esperado que os estudantes reconheçam, se a curva se aproxima do gráfico de uma Função Afim, Quadrática ou de uma Exponencial.

No Capítulo 1, são apresentados os objetivos dessas atividades, estando de acordo com a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) da etapa do ensino médio e pretendendo com as atividades propostas contemplar algumas habilidades. No Capítulo 2, foi feita uma Revisão Bibliográfica para familiarizar-se com o tema em outros trabalhos, além de dois livros didáticos e uma Fundamentação Teórica para definir e aprofundar o estudo da metodologia, justificando dessa maneira a importância dos recursos utilizados na construção das atividades.

Na primeira atividade, descrita no Capítulo 3, o estudo da Função Quadrática ocorre por meio de uma situação problema, em que o estudante deverá conjecturar quantas moedas de mesmo tamanho serão necessárias para preencher um disco de diâmetro dado. Após verificar o resultado para alguns círculos de diâmetros distintos, espera-se que o estudante reconheça a curva do tipo $y = ax^2$, como melhor alternativa para modelar o traço desenhado por eles, a partir da relação do tamanho do diâmetro círculo maior (que também é chamado de disco) com o número de moedas. É proposta uma discussão sobre o domínio e contradomínio da função e que a curva encontrada não é o gráfico da função que modela o problema proposto, mas sim coincide com o gráfico nos pontos marcados pelos estudantes no plano cartesiano.

A segunda atividade que é apresentada no Capítulo 3, será desenvolvida com auxílio de alguns retângulos e uma proposta, na qual o estudante procura otimizar a área de um campo para um determinado perímetro. O objetivo é construir a resolução do problema, obtendo uma fórmula que ajude na resolução do problema geral, além de concluir que a Função Quadrática é novamente a melhor opção de função associada ao problema proposto.

No Capítulo 4, é apresentado o relato da aplicação da atividade Círculo de Moedas, numa turma de Licenciatura em Matemática da FURG. Devido ao Covid-19, essa atividade foi aplicada no formato online. Após alguns educandos terem recortados os círculos e enviado as suas respostas para um formulário do *Google Forms*, foi feito o encontro síncrono para o desenvolvimento da atividade, onde eles puderam interagir com o material proposto.

Nas duas atividades existem rodadas de perguntas, que mostram a importância da mediação do professor para auxiliar os estudantes ao longo das atividades, além de permitir o melhor andamento da investigação e assim ser possível o reconhecimento da curva e da Função Quadrática nos problemas propostos.

Os formatos das atividades estão propostos com detalhes para serem aplicados no modelo de aula presencial, mas com algumas adaptações indicadas no texto também podem ser aplicados na forma online ou ainda híbrida. Tanto a utilização dos círculos, quanto a dos retângulos como material de apoio, permitem uma maior interação com os estudantes durante o desenvolvimento da atividade. Além disso, o estudante é convidado a refletir sobre cada questão proposta, permitindo que o caminho percorrido seja valorizado e conjecturas ou generalizações possam ser construídas com significado.

No Capítulo 5 estão algumas considerações sobre os resultados obtidos e possíveis desdobramentos das atividades. Nos Apêndices estão todos os materiais nas dimensões certas, além das rodadas de perguntas, tabelas e plano cartesiano, todos prontos para imprimir. Há também o material que pode ser enviado ao aluno para a aplicação das atividades no formato online.

1 Objetivos

Segundo BRASIL (2018), uma das competências gerais do Ensino Básico é

> Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas. (BRASIL, 2018, p. 9)

Nesse sentido, com a intenção de levar o estudante a investigar e analisar as questões envolvendo o conteúdo de Função Quadrática, deseja-se que ele reflita para resolver os problemas propostos. Assim, esse trabalho tem o objetivo geral de levar o estudante a reconhecer uma Função Quadrática, por meio da Investigação Matemática com a utilização de material concreto.

1.1 Objetivos Específicos

Mais precisamente e de acordo a BNCC da etapa do Ensino Médio (BRASIL, 2018), desejamos com as atividades propostas contribuir no desenvolvimento das seguintes habilidades:

EM13MAT302 Resolver e elaborar problemas cujos modelos são as funções polinomiais de primeiro e segundo graus, em contextos diversos, incluindo ou não tecnologias digitais.

EM13MAT502 Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de segundo grau do tipo $y = ax^2$.

EM13MAT316 Resolver e elaborar problemas, em diferentes contextos, que envolvem cálculo e interpretação das medidas de tendência central (média, moda, mediana) e das de dispersão (amplitude, variância e desvio padrão).

EM13MAT510 Investigar conjuntos de dados relativos ao comportamento de duas variáveis numéricas, usando tecnologias da informação, e, se apropriado, levar em conta a variação e utilizar uma reta para descrever a relação observada.

EM13MAT506 Representar graficamente a variação da área e do perímetro de um polígono regular quando os comprimentos de seus lados variam, analisando e classificando as funções envolvidas.

A partir dessas habilidades, foi possível definir os objetivos específicos das atividades propostas, a saber:

- Resolver problemas cujos modelos são as Funções Quadráticas;
- Expressar em tabelas os dados obtidos a partir dos problemas propostos para representá-los no plano cartesiano;
- Associar a representação dos dados em tabelas com a representação gráfica da função;
- Resolver cálculos envolvendo a média aritmética;
- Investigar os dados obtidos relacionando as variáveis envolvidas, podendo para isso utilizar a calculadora ou software;
- Representar e analisar graficamente as funções envolvidas;
- Revisar propriedades das funções Afim, Quadrática e Exponencial.

Com a intensão de fundamentar as atividades propostas nesse trabalho, bem como estudar como alguns autores trabalham com o tema, no próximo capítulo serão apresentados uma Revisão Bibliográfica e Fundamentação Teórica desse trabalho.

2 Revisão Bibliográfica e Fundamentação Teórica

Nesse capítulo serão apresentadas a Revisão Bibliográfica, discutindo o tema desse trabalho, e também a Fundamentação Teórica. É importante destacar que nos livros didáticos é utilizada de forma predominante a nomenclatura de Função Quadrática, enquanto na BNCC, exclusivamente aparece Função Polinomial do Segundo Grau. As duas nomenclaturas são equivalentes e serão tratadas como sinônimos ao longo desse trabalho.

2.1 Revisão Bibliográfica

Após uma pesquisa feita no repositório de dissertações defendidas pelos alunos do PROFMAT, no qual têm mais de cinco mil e seiscentos títulos defendidos, destacam-se 25 desses trabalhos falando sobre a Função Polinomial do Segundo Grau ou Função Quadrática. Precisamente, serão discutidos três trabalhos que foram considerados relevantes para a nossa pesquisa. É importante destacar que todas as três propostas desses trabalhos ocorreram no formato presencial.

Na dissertação de Brito (2019), o autor inicia tratando da fundamentação matemática necessária para a compreensão do trabalho. Após apresenta a sequência didática para o ensino de Função Quadrática em 12 aulas, sendo as aulas iniciais voltadas à teoria, outras direcionadas a confecção das pontes e as últimas a apresentação da maquete. Para isso buscou uma estratégia que desperte uma melhor compreensão da matéria, além de apresentar exemplos de pontes no Brasil com uma apresentação no *Power Point*. A seguir, coloca em prática uma construção da maquete da ponte utilizando palitos. Pela manipulação de materiais concretos são destacados, principalmente, os elementos da função quadrática.

No trabalho de Prado (2014), para chegar à Função Polinomial do Segundo Grau o autor faz uma explicação, começando com a Equação do Segundo Grau e incluindo como alguns estudiosos contribuíram a respeito do seu desenvolvimento, além da história desses estudiosos. O autor apresenta também exemplos de pontes, análise de objetivos traçados pelo Ministério da Educação, como os Parâmetros Curriculares Nacionais e a Prova Brasil. Também faz uma análise de como a Equação e a Função do Segundo Grau são trabalhadas nos livros didáticos, com atividades simples e variadas busca motivar os alunos a compreender o conteúdo. Uma das atividades, em grupo, sugere criar uma manifestação artística (paródia, música, poesia, peça de teatro entre outras), que envolva os conceitos históricos relacionados à Equação do Segundo Grau. Uma outra atividade sugere construir um jornal com textos elaborados pelos alunos sobre a História da Matemática, para isso os alunos recebem a cada semana uma página, para debater. Numa atividade de resolver uma Equação do Segundo Grau, utilizou retângulos de EVA e área dessas figuras para mostrar uma maneira de resolver tal equação. Também são construídos refletores luminosos em formato de parábola com alguns materiais necessários como: papelão grosso, folha de papel alumínio, cartolina, palito de madeira roliço, cola, uma lanterna com feixe de luz, entre outros. O autor utiliza softwares como o Winplot para plotar gráficos de uma e duas variáveis e o Geogebra para trabalhar a definição geométrica de parábola, conceitos como foco e diretriz. Por último, são propostas questões de problemas de Equação e Função do Segundo Grau, todas acompanhadas de várias maneiras de solução.

Com relação ao trabalho de Kosloski (2018), o autor começa apresentando uma pequena história das cônicas, o avanço obtido por diversos matemáticos, além do conteúdo da Função Quadrática estudada no primeiro ano do Ensino Médio. Assim, inicia com uma revisão para então poder apresentar os conteúdos introdutórios da Função Quadrática, como completar quadrados e sistemas. Na atividade 2 ocorre o estudo da parábola a partir do cotidiano. Como exemplos trazidos pelos alunos foram imagens de: pista de skate, guarda-chuva, pontes e antenas parabólicas. Na atividade 3, o objetivo é verificar a propriedade refletora da parábola, com isso construíram um refletor parabólico com papelão, papel alumínio e fita adesiva. Para poder fazer as medições na parábola, primeiro encontraram o foco do raio solar e colocaram no lugar um termômetro para saber a temperatura deste foco. Na atividade 4, a intenção é encontrar a lei de formação da Função Quadrática conhecendo três pontos pertencentes ao gráfico da parábola. Para isso, os estudantes primeiro resolveram um sistema de equações de três variáveis e três equações, para poderem chegar a lei de formação e depois a construção do gráfico feito em papel milimetrado, sendo feito a correção pelo software Geogebra. Na atividade 5, o objetivo é fazer os alunos perceberem a evolução das ideias matemáticas e encontrar as raízes, apresentando primeiro um vídeo "A fórmula que não é de Bhaskara"e uma proposta da solução da equação utilizando o método babilônico de encontrar dois números conhecendo sua soma e seu produto. Na atividade 6, o objetivo é encontrar as raízes e o vértice por meio da forma canônica do trinômio e poder construir o gráfico da função. Na atividade 7, resolver situações problemas envolvendo máximos e mínimos, para tal os alunos precisavam determinar a lei de formação da função e depois utilizar a forma canônica do trinômio para encontrar o valor de máximo e/ou de mínimo. Para encerrar, após exemplos resolvidos em conjunto com a professora, os estudantes recebem uma lista de exercícios, para em grupos resolverem.

Para construir uma proposta que complemente e auxilie o estudo da função quadrática, foram analisados dois livros didáticos que contém o assunto e são recomendados pelo Plano Nacional do Livro Didático (PNLD).

O primeiro livro, de Souza e Garcia (2016) intitulado Contato matemático, no capítulo 4 na parte da apresentação, fala sobre o salto dos cangurus, no qual os autores fazem uma provocação com algumas perguntas. Começa, então, a explicação com um exemplo de uma horta onde será ampliado em uma mesma medida, e com esse exemplo chega na Função Quadrática. Para explicar o gráfico, volta ao salto dos cangurus e com o auxílio do plano cartesiano faz o esboço do gráfico. A partir daí, com outros exemplos de funções dadas, os autores explicam a parte dos coeficientes. No contexto, explicou a queda livre com um exemplo do físico Galileu Galilei, através da expressão:

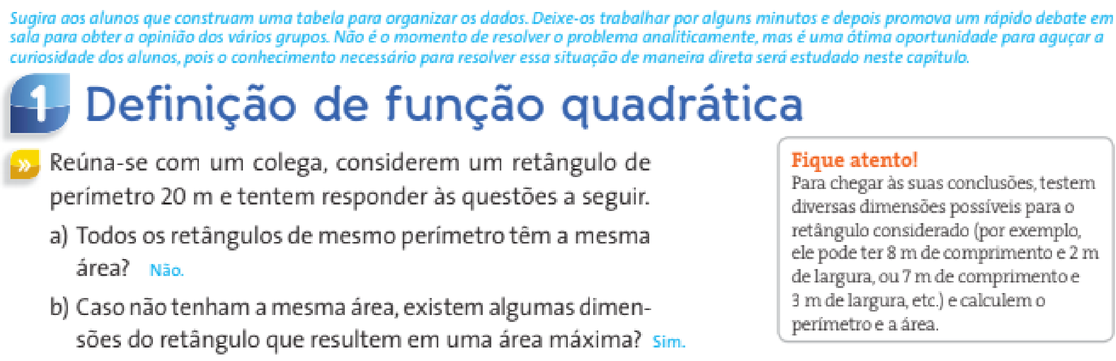
$$d = kt^2,$$

onde d é a distância percorrida pelo objeto, k a constante de proporcionalidade e t o tempo de queda.

Os outros itens da matéria como por exemplo: os zeros de uma Função Quadrática, o vértice de uma parábola, valor máximo ou valor mínimo e o estudo do sinal de uma Função Quadrática, são explicados de uma maneira mais direta. Observando, que os autores colocaram exercícios diretos e outros da vivência do nosso dia-a-dia.

Já o livro de Dante (2013), começa falando da montanha russa como exemplo de parábola, além do satélite artificial para falar do foco, como forma de apresentação do conteúdo. Ao iniciar a definição de Função Quadrática, para aguçar a curiosidade dos alunos, pede para que os alunos se reúnam em dupla e respondam as seguintes perguntas (1):

Figura 1 – Definição de Função Quadrática no livro do Dante



Sugira aos alunos que construam uma tabela para organizar os dados. Deixe-os trabalhar por alguns minutos e depois promova um rápido debate em sala para obter a opinião dos vários grupos. Não é o momento de resolver o problema analiticamente, mas é uma ótima oportunidade para aguçar a curiosidade dos alunos, pois o conhecimento necessário para resolver essa situação de maneira direta será estudado neste capítulo.

1 Definição de função quadrática

Reúna-se com um colega, considerem um retângulo de perímetro 20 m e tentem responder às questões a seguir.

a) Todos os retângulos de mesmo perímetro têm a mesma área? Não.

b) Caso não tenham a mesma área, existem algumas dimensões do retângulo que resultem em uma área máxima? Sim.

Fique atento!
Para chegar às suas conclusões, testem diversas dimensões possíveis para o retângulo considerado (por exemplo, ele pode ter 8 m de comprimento e 2 m de largura, ou 7 m de comprimento e 3 m de largura, etc.) e calculem o perímetro e a área.

Fonte: Próprio autor

As respostas seriam não e sim, respectivamente, conforme o livro do professor deixando em aberto as sua justificativas. Logo após o autor vai direto para a definição da matéria. Num segundo item, apresenta uma situação em que aparece a Função Quadrática na geometria. Nesse livro coloca exercícios resolvidos, sempre de forma direta, porém os execícios para resolver contém temas do dia-a-dia. Apresenta uma conexão entre Função

Quadrática e física, no qual fala sobre o Movimento Uniformemente Variado (MUV). Em seguida, apresenta uma conexão entre Função Quadrática e progressão aritmética. Colocou a determinação dos zeros por completamento de quadrado, como um assunto opcional. Encerra o capítulo com exercícios para os estudantes pensarem no ENEM, no qual envolve a Função Afim e Quadrática, porém em exercícios separados.

É possível perceber que os dois livros propõem maneiras diferentes de apresentarem o conteúdo, no entanto, não fazem uma atividade que relaciona todos os conceitos utilizados entre si.

Nesse trabalho, primeiramente utilizando tabelas, após questões norteadoras, material concreto, gráficos e desafios, desejamos por meio da Investigação Matemática que o estudante possa chegar a uma solução para os problemas propostos. Assim, espera-se descobrir qual função é a melhor opção para representar o problema, além de fazer uma relação com outros tipos de funções, mostrando o porquê de sua escolha e se ela está relacionada ou não ao gráfico encontrado.

2.2 Fundamentação Teórica

A Investigação Matemática propõe desafios tanto para o professor quanto para os educandos, pois é um caminho a ser percorrido através de dinâmicas e provocações, além de ajudar tanto no ensino quanto na aprendizagem estimulando a criatividade e o raciocínio. O *blog* Tecnologia Educacional (DIGITAL, 2017) apresenta uma fala do pesquisador João Pedro da Ponte, Diretor Instituto de Educação da Universidade de Lisboa:

> "... investigar não significa necessariamente lidar com problemas na fronteira do conhecimento nem com problemas de grande dificuldade. Significa, apenas, trabalhar a partir de questões que nos interessam e que se apresentam inicialmente confusas, mas que conseguimos clarificar e estudar de modo organizado"(DIGITAL, 2017).

Por isso, quando um estudante tenta resolver um determinado problema por meio de questões, ele vai refletindo sobre as possibilidades que o professor propõe e a partir delas criando suas próprias conjecturas e conclusões.

Nesse trabalho, entende-se a investigação como sendo a observação e descoberta de relações entre objetos matemáticos conhecidos ou desconhecidos, onde se valoriza o caminho percorrido pelo estudante para encontrar as respostas das perguntas propostas. A partir delas, pretendemos possibilitar aos educandos um novo olhar sobre esses objetos. Conforme Ferruzzi e Costa (2018), o professor é incentivado a trabalhar com a investigação pois:

> Trabalhar com atividades de Investigação Matemática em sala de aula possibilita aos alunos estudar conceitos matemáticos presentes no contexto das atividades, ampliando ou aprimorando suas múltiplas capacidades, como a criatividade, a interpretação, a reflexão, a argumentação, a sistematização e a autonomia (FERRUZZI; COSTA, 2018, p. 298).

Segundo Mendonça (2010) é importante trabalhar o processo de ensino e aprendizagem da matemática de uma forma lúdica para melhorá-lo e para que mais estudantes sejam incluídos nesse processo.

> O professor deve conscientizar-se de que o foco principal do processo ensino- aprendizagem é o desenvolvimento integral do aluno e não apenas a simples transmissão do conteúdo. Daí surge, então, a necessidade de a escola apresentar atividades pedagógicas que propiciem a participação efetiva de todos, com alegria, imaginação e criatividade (MENDONÇA, 2010, p. 138).

Para Chas (2014), o professor precisa diversificar a maneira de ensinar e tornar a disciplina mais interessante e atrativa, pois não existe um único caminho que torna o processo de ensino e aprendizagem mais interessante.

Não existe um caminho único para o ensino da Matemática, no entanto, tentar diversas maneiras de trabalhar em sala de aula é essencial para que o professor possa tornar a disciplina mais interessante e atrativa. Conforme Cunha e Silva (2012):

> A Matemática lúdica é uma ferramenta essencial pronta a atender à necessidade de elaborar pedagogicamente aulas com maior aproveitamento e entretenimento, ajudando o aluno a analisar, compreender e elaborar situações que possam resolver determinados problemas que sejam propostos pelo professor permitindo a análise e compreensão da proposição exposta pelo aluno – o resultado – e assim adquirir conhecimento, interpretar e articular métodos para argumentar e concretizar problemas (CUNHA; SILVA, 2012, p. 2).

As atividades propostas nesse trabalho pretendem despertar a curiosidade por meio da investigação, incentivando a conjectura sobre os resultados, assim como o material funciona como ferramenta para incentivar a criatividade, a imaginação e melhorar o processo de ensino-aprendizagem e desmistificar o ensino da matemática.

Propõe-se que as atividades sejam realizadas em pequenos grupos. O trabalho em grupo permite uma troca de informações horizontal, em que os estudantes com conhecimentos complementares e em um nível mais próximo, conseguem trocar ideias e conjecturar sobre as tarefas. Segundo Loiola (2009),

> Felizmente, estudos e pesquisas didáticas mostram que determinadas atividades, quando realizadas em grupos, trazem mais benefícios para o aprendizado de todos. Mas essa forma de ambientação da classe precisa ser pensada com antecedência para que os objetivos sejam efetivamente

> atingidos. Divididos de forma adequada e sob a supervisão do professor, os alunos aprendem na troca de pontos de vista, ganham espaço para criar e passam a testar hipóteses, refazer raciocínios e estabelecer correlações, para construir conhecimentos (LOIOLA, 2009).

Dessa forma, acredita-se que os estudantes terão a oportunidade de se organizarem para conseguir atingir os objetivos das atividades. No próximo capítulo, apresentamos a caracterização das duas atividades propostas.

3 Descrição geral das Atividades

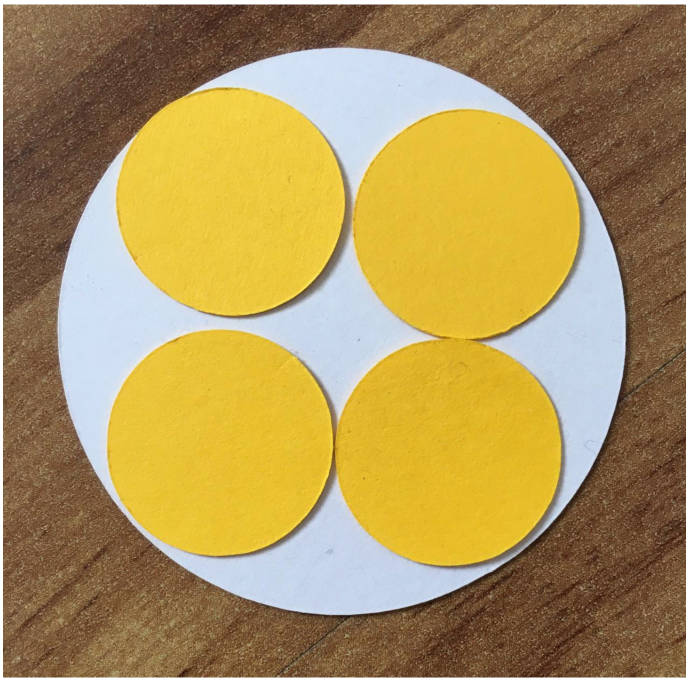
Nesse capítulo apresentamos a descrição das duas atividades propostas: O Círculo de Moedas e Retângulos.

3.1 Atividade Círculo de Moedas

Sugerimos iniciar a atividade distribuindo a primeira parte do material que será utilizado, a saber: um círculo e algumas moedas, conduzindo uma discussão sobre a relação entre o tamanho do diâmetro do círculo dado e a quantidade de moedas necessárias para preencher esse círculo. Esse material está disponível no Apêndice A.

Primeiramente, serão entregues um círculo com 5 cm de diâmetro e algumas moedas com 2 cm de diâmetro, onde os estudantes irão preencher esse círculo com as moedas, tentando sobrepor o mínimo as moedas. É importante observar que uma sobreposição considerável das moedas pode comprometer o resultado esperado para a realização da atividade. Veja a Figura 2.

Figura 2 – Círculo de diâmetro 5cm e 4 moedas



Fonte: Próprio autor

Os estudantes receberão também uma tabela para fazer as seguintes anotações: na primeira coluna anotarão o diâmetro do círculo e na segunda coluna, o número de moedas que precisaram para preencher esse círculo.

Um exemplo de tabela que pode ser fornecida é a Tabela 1, onde o estudante deverá registrar as informações que encontrou, como na Figura 2.

Tabela 1 – Tabela Diâmetro x Número de moedas

Diâmetro do Círculo	Número de moedas
5	4

É esperado que os estudantes concluam que são necessárias 4 moedas para preencher o círculo de diâmetro 5 cm. Após essa etapa, irão receber um outro círculo, agora com 10 cm de diâmetro. Nesse momento, o professor pode fazer algumas perguntas que serão entregues em formato de fichas, para que no final da atividade sejam devolvidas para avaliação.

Primeira rodada de perguntas

1. Quantas moedas serão necessárias para o seu preenchimento?
2. Será que é o dobro de moedas em relação ao disco anterior?

Como resposta, os estudantes dirão um número de moedas e sua expectativa em relação ao número de moedas utilizadas anteriormente.

Em seguida, será necessário verificar se eles acertaram ou não o número de moedas para completar o disco de 10 cm de diâmetro. Resposta esperada: 19 moedas (veja a Figura 3).

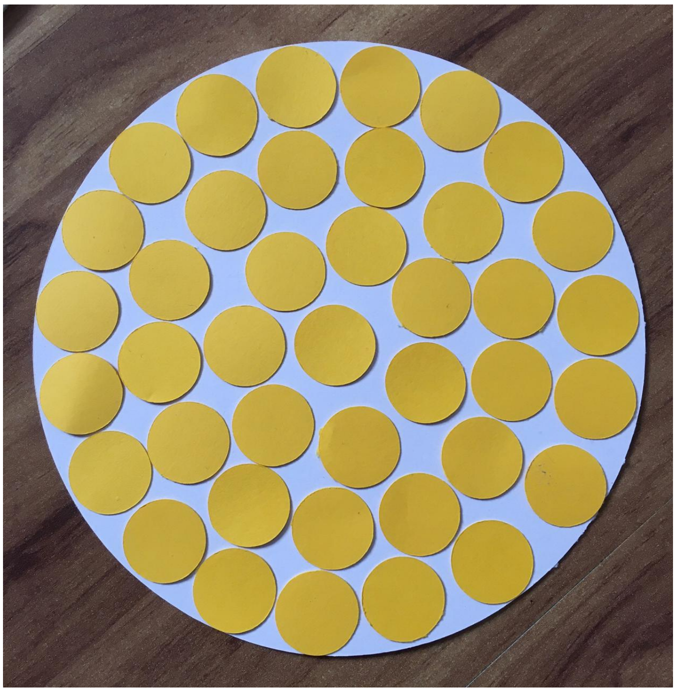
Figura 3 – Círculo de diâmetro 10 cm e 19 moedas

Fonte: Próprio autor

Agora, os estudantes poderão anotar na Tabela 1 quantas moedas utilizaram. Irão preencher na coluna diâmetro do círculo 10 cm e na coluna do número de moedas, a quantidade que utilizaram para preenchê-lo.

Em seguida entregar um terceiro círculo de 15 cm de diâmetro e, novamente, antes de verificar na prática, refazer a pergunta da Primeira Rodada: quantas moedas vocês acham que precisam utilizar para preencher o círculo? Espera-se que respondam cerca de 40 moedas (veja a Figura 4).

Figura 4 – Círculo de diâmetro 15cm e 40 moedas



Fonte: Próprio autor

Nesse momento, em forma de questionamento, pode-se ainda conversar com a turma sobre outras possibilidades.

Segunda rodada de perguntas

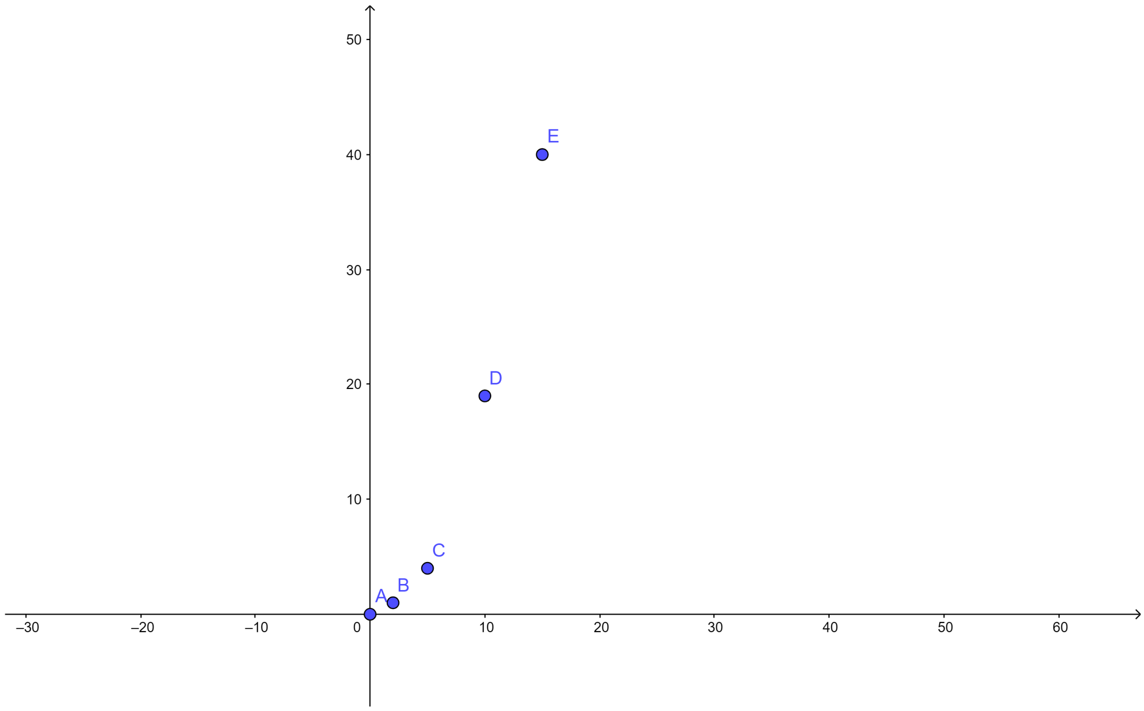
1. Se tenho um círculo de 2 cm, que é o tamanho da moeda, quantas moedas vou precisar para preenchê-lo?

2. Se não tenho nenhum círculo, vou precisar de moedas?

É importante registrar essas informações na Tabela 1. Após essas perguntas, com auxílio da Tabela 1, a próxima etapa consiste de esboçar no plano cartesiano a curva que melhor aproxima os resultados encontrados.

Os estudantes receberão uma folha de papel (no material do aluno chamada de Plano Cartesiano) para esboçar o gráfico, onde primeiramente marcarão os pontos encontrados, sendo no eixo das abscissas o tamanho do diâmetro do disco e no eixo das ordenadas, o número de moedas que foram utilizadas para preencher o respectivo disco. Sugere-se marcar também os pontos $(0, 0)$ e $(2, 1)$ de acordo com a Segunda rodada de perguntas (veja a Figura 5).

Figura 5 – Pontos encontrados ilustrados no software GeoGebra



Fonte: Próprio autor

Após, os estudantes deverão traçar a curva que passa pelos pontos marcados no papel. Pode-se perguntar:

Terceira rodada de perguntas

1. Que tipo de curva é essa?

2. Será que ela se parece com o gráfico de uma Função Afim, ou de uma Função Quadrática, ou será de uma Função Exponencial?

3. De forma equivalente: a curva que passa pelos pontos marcados pode ser uma reta? Pode ser uma parábola?

4. O que levou você a chegar a esse resultado?

Esperamos que eles percebam que a curva parece uma parte da parábola, gráfico de uma Função Quadrática. Também é possível que os estudantes observem que a curva é crescente no intervalo em que foi esboçada.

3.1.1 Resultados esperados

É esperado que, após colocar na Tabela 1 o número de moedas e o diâmetro do disco, marcar os pontos no plano e traçar a curva, os estudantes tentem chegar a alguma conclusão (com justificativa) sobre o tipo da curva.

Primeiro, é possível escolher dois dos pontos e traçar no Plano Cartesiano uma reta que passa por eles para verificar se os demais pontos estão próximos dela (é possível verificar que não). Veja a seção 3.1.2 para um possível desdobramento nessa etapa.

Agora, será que essa curva é o gráfico de uma Função Quadrática, ou seja, uma parábola?

Ao preencher o círculo, coloca-se o máximo de moedas dentro dele, tentando evitar a sobreposição) e deixar o mínimo de espaço vazio. Na verdade, seria como estimar a sua área. Nesse momento sugere-se a questão:

Qual a fórmula da área do círculo?

$$A = \pi \cdot r^2, \tag{3.1}$$

ou seja, a área A do círculo é um valor que depende do raio r dele. Note que, nesse caso (na atividade) o que está variando é o tamanho do diâmetro d, que por sua vez é o dobro do raio r:

$$d = 2r.$$

Assim, é possível calcular a área do círculo fazendo

$$\begin{aligned} A = & \ \pi \cdot \left(\tfrac{d}{2}\right)^2 \\ = & \ \tfrac{\pi}{4} \cdot d^2. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Portanto, como o raio está elevado ao quadrado em (3.1) e o diâmetro em (3.2), isso permite conjecturar que a área em função do raio ou do diâmetro, é uma função cujo gráfico lembra uma parábola cuja equação é

$$y = ax^2 + bx + c$$

onde, mais precisamente, temos: $a = \pi$, $x = r$ e $b = c = 0$ se considerarmos como função do raio e $a = \frac{\pi}{4}$, $x = d$ e $b = c = 0$ se considerarmos A como função do diâmetro.

Como estamos falando de diâmetro e número de moedas, então o domínio da função é $\mathbb{R}_+$ e o contradomínio também será $\mathbb{R}_+$.

Nesse momento, sugere-se em conjunto com os estudantes, concluir que a função que representa o problema estudado é $M : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, cuja lei é

$$M(d) = ad^2, \tag{3.3}$$

onde: M é o número de moedas utilizado para preencher o disco de diâmetro d e a é o coeficiente principal que ainda é desconhecido.

Para isso, uma pergunta é pertinente: será que a curva que passa pelos pontos encontrados na Tabela 1 também é uma parábola de equação do tipo $y = ax^2$? Se sim, como é possível determinar o coeficiente a?

Para determinar a, os estudantes poderão realizar os cálculos substituindo em (3.3), conforme os dados da Tabela 1.

Assim:

$$1 = a(2)^2 \Rightarrow a = 0,25,$$

$$4 = a(5)^2 \Rightarrow a = 0,16,$$

$$19 = a(10)^2 \Rightarrow a = 0,19,$$

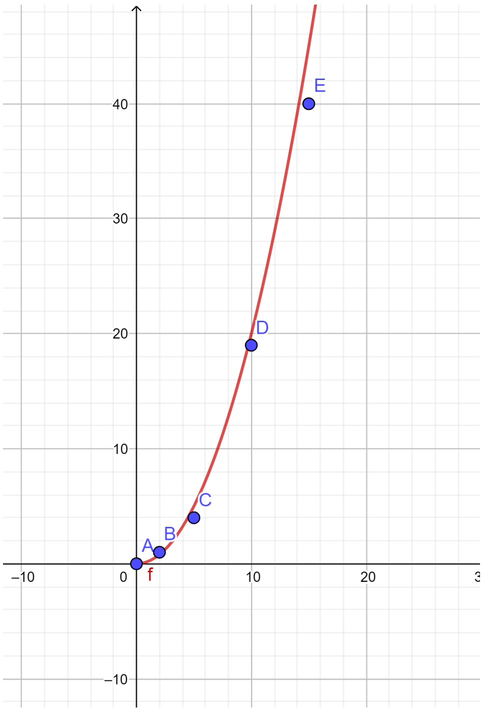
$$40 = a(15)^2 \Rightarrow a = 0,18.$$

Em conjunto com os estudantes, definir o valor de a que será utilizado. Uma sugestão é considerar a média aritmética dos valores encontrados fazendo o cálculo:

$$a = \frac{0,25 + 0,16 + 0,19 + 0,18}{4} = 0,2.$$

Com esses cálculos, espera-se que eles percebam que a curva $y = (0,2)x^2$ é uma aproximação muito boa para o gráfico da função M definida em (3.3). Uma ilustração da curva pode ser vista na Figura 6.

Figura 6 – Esboço da curva $y = (0,2)x^2$



Fonte: Próprio autor

3.1.2 Possível desdobramento

Nessa seção apresentamos uma possibilidade de explorar a equação de uma reta, resolução de um sistema linear e o gráfico de uma Função Afim, a partir da atividade realizada. Desejamos que o estudante perceba que uma reta não é uma boa aproximação para a curva que passa pelos pontos encontrados na Tabela 1 e consiga justificar formalmente essa conclusão.

Uma maneira alternativa de não utilizar o folha quadriculada (Plano Cartesiano no material do aluno) é verificar se três dos pontos obtidos estão numa reta. Para isso, primeiramente tomar dois pontos encontrados anteriormente, por exemplo $(5,4)$ e $(10,19)$. Substituindo na equação da reta

$$y = ax + b,$$

tem-se o sistema:

$$\begin{aligned} 4 &= 5a + b \\ 19 &= 10a + b. \end{aligned}$$

Para resolvê-lo, basta multiplicar a primeira linha desse sistema por (-1):

$$\begin{aligned} -4 &= -5a - b \\ 19 &= 10a + b. \end{aligned}$$

Ao somar essas duas linhas teríamos:

$$5a = 15 \Rightarrow a = 3.$$

Ao substituir o valor de $a = 3$ na equação $5 = 5a + b$ obtemos:

$$5 = 5 \cdot 3 + b \Rightarrow 5 = 15 + b \Rightarrow b = -11.$$

Agora temos a reta $y = 3x - 11$.

Sugerimos agora tomar um terceiro ponto da Tabela 1, por exemplo o ponto $(15, 40)$ e verificar se pertence ou não a essa reta, ou seja, se quando $x = 15$, obtemos $y = 40$.

Substituindo x por 15:

$$\begin{aligned} 40 &\stackrel{?}{=} 3 \cdot 15 - 11 \qquad (3.4) \\ 40 &\stackrel{?}{=} 45 - 11 \\ 40 &\neq 34. \end{aligned}$$

Portanto, não temos uma reta que passa por esses três pontos, logo a curva procurada não é gráfico de uma Função Afim pois a diferença entre 40 e 34 é considerável, sendo a reta uma aproximação ruim para a curva encontrada na atividade.

Como justificar que essa curva não é o gráfico de uma função do tipo exponencial? Para isso primeiramente consideramos os pontos encontrados: $(0, 0), (2, 1)$, $(5, 4), (10, 19), (15, 40)$.

Uma justificativa possível é que no gráfico de uma função do tipo exponencial, por definição o ponto $(0, 0)$, não pertence curva $y = a^x$, onde $a \neq 1$ e $a > 0$. Outra possibilidade é testar os demais pontos, e ainda estimar um valor da base a (desprezando) o ponto $(0, 0)$.

Testando os outros pontos (com o auxílio da calculadora) em $y = a^x$, para estimar uma aproximação de a:

Ponto $(2, 1)$, temos

$$1 = a^2 \Rightarrow a = 1.$$

Note que esse valor não serve pois pela definição $a \neq 1$.

Ponto $(5, 4)$:

$$4 = a^5 \Rightarrow a = \sqrt[5]{4} \Rightarrow a = 1,32.$$

Ponto $(10, 19)$:

$$19 = a^{10} \Rightarrow a = \sqrt[10]{19} \Rightarrow a = 1,34.$$

Ponto $(15, 40)$:

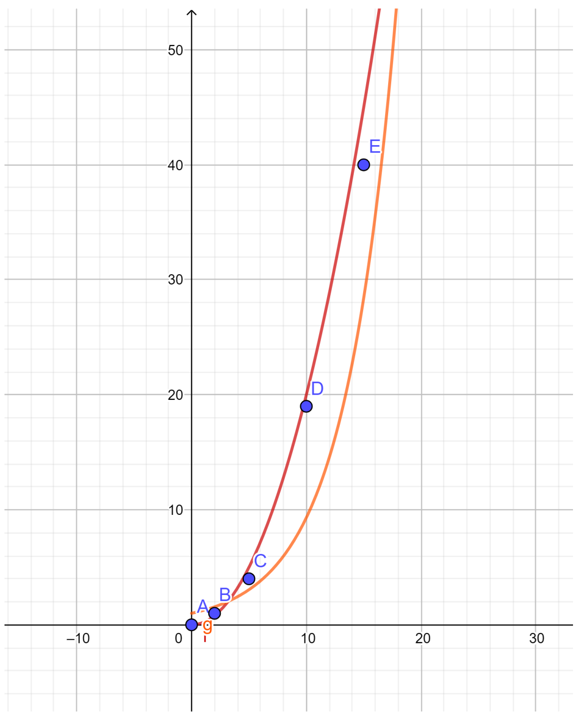
$$40 = a^{15} \Rightarrow a = \sqrt[15]{40} \Rightarrow a = 1,28.$$

Fazendo a média aritmética com os valores encontrados:

$$a = \frac{1,32 + 1,34 + 1,28}{3} = 1,3.$$

Vamos considerar $a = 1,3$ para esboçar a curva exponencial (veja a Figura 7).

Figura 7 – Esboço das curvas $y = (0,2)x^2$ (vermelho) e $y = (1,3)^x$(laranja)



Fonte: Próprio autor.

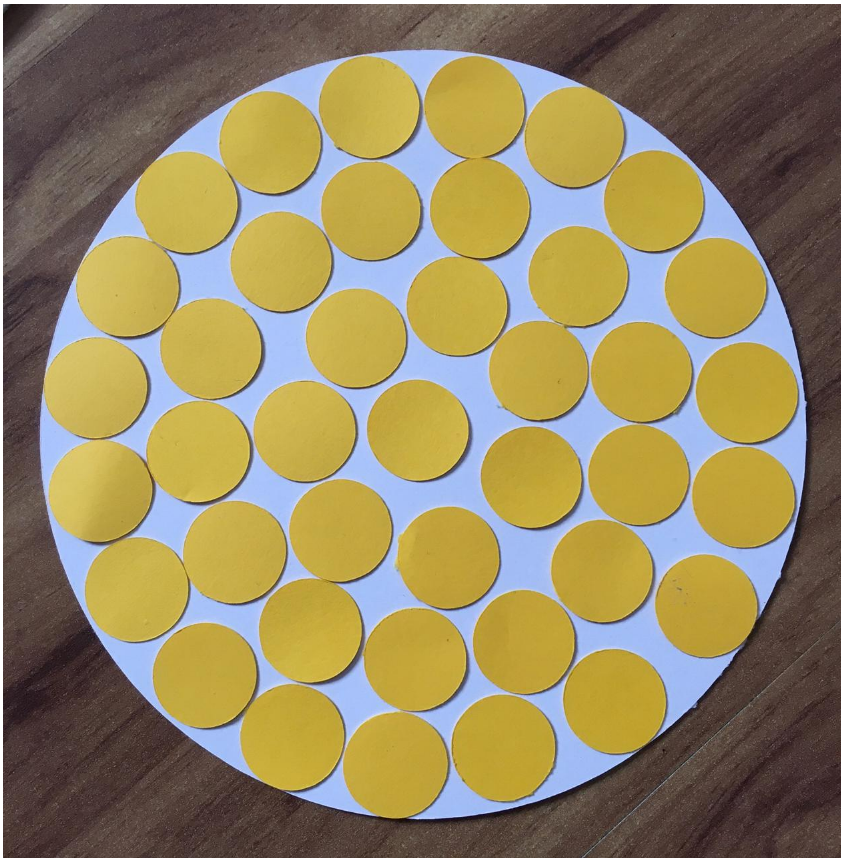
Diante dos valores obtidos, é possível perceber a curva que melhor se aproxima dos pontos realmente é a parábola.

3.1.3 Círculo de Moedas na modalidade Online

Para aplicar essa atividade no formato online, primeiro os estudantes já devem ter recebido:

- gabarito com os três círculos;
- gabarito das moedas amarelas;
- a Tabela Diâmetro x Número de moedas;
- ter uma calculadora calculadora em mãos;
- figura de um disco preenchido (Figura 8).

Figura 8 – Disco de diâmetro preenchido com as moedas



Fonte: Próprio autor

O material que deve ser encaminhado para os alunos para aplicar nesse formato, está disponível no Apêndice B.

Primeiramente professor pode pedir para os estudantes já recortarem os discos e as moedas amarelas. Após, devem pegar o círculo de diâmetro 5 cm e preencher esse círculo com as moedas (que são os círculos de diâmetro 2 cm), tentando sobrepor o mínimo as moedas. É importante observar que uma sobreposição considerável das moedas pode comprometer o resultado esperado para a realização da atividade.

Os estudantes deverão também ter em mãos a tabela do material do aluno para fazer as seguintes anotações: na primeira coluna anotarão o diâmetro do círculo e na segunda coluna, o número de moedas que precisaram para preencher esse círculo. Devem fazer o mesmo com os outros círculos e anotarem na tabela o resultado encontrado para o seu preenchimento.

Depois o professor pode pedir aos estudantes que preencham um google formulário. Uma sugestão se encontra clicando nesse link: <https://forms.gle/gBjqr2hF8vtRo8Y87>. Cada professor deve criar o seu formulário, para ter acesso as respostas enviadas pela sua turma.

Após, os estudantes podem marcar os pontos registrados na tabela usando a plataforma desmos: <https://www.desmos.com/calculator?lang=pt-BR>, salvando o arquivo com os pontos marcados.

Os pontos marcados possuem como abscissa o diâmetro do círculo e ordenada o número de moedas utilizado para preencher esse círculo. Não esqueça de perguntar no encontro síncrono aos estudantes qual curva conhecida poderia ser esboçada passando pelos pontos marcados.

Como desafio para o encontro síncrono, sugere-se pedir que desenhem a curva passando pelos pontos marcados na plataforma.

Se o professor desejar, pode solicitar que os estudantes enviem o arquivo com os pontos marcados na plataforma Desmos. Para isso, se estiver usando o computador, basta clicar em Compartilhar Gráfico e após Exportar Imagem (salvar no formato PNG). Se estiver usando o celular, para salvar a imagem é necessário cadastrar um login e senha.

No encontro síncrono, o professor irá retomar o que foi feito pelos estudantes. Após, explicar como encontrar o coeficiente a da curva $y = ax^2$, como foi descrito na proposta de aplicação no formato presencial. Em seguida, cada estudante vai encontrar o seu próprio a e esboçar a sua parábola, compartilhando o arquivo com o professor.

A discussão sobre a Função Exponencial e a Função Afim que foi realizada na descrição da atividade no formato presencial fica opcional nesse formato de aplicação da atividade.

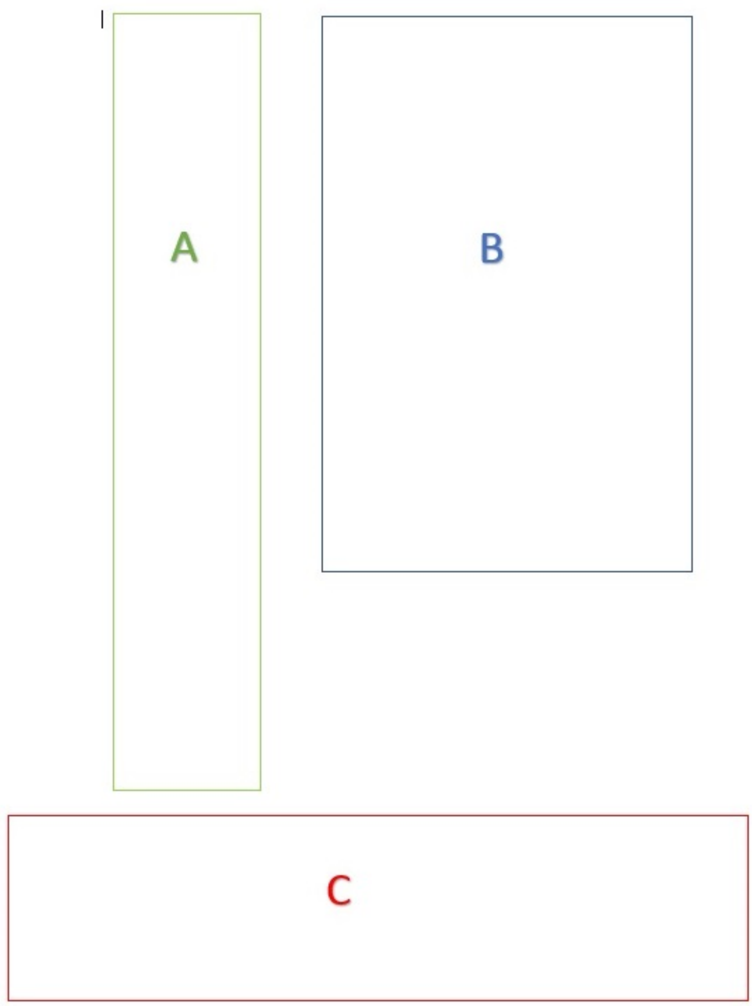
Observação: é possível os educandos construírem com o compasso os círculos maiores e também desenharem com ele os círculos menores (moedas) em seu interior. Além disso, podem esboçar sua própria tabela e os pontos encontrados num eixo de coordenadas construídos por eles. Se o professor desejar, existe a possibilidade dessas etapas também ocorrerem num encontro síncrono.

3.2 Atividade Retângulos

Essa atividade busca desenvolver as questões propostas por Dante (2013) ao introduzir o conteúdo de Função Quadrática. Para realização dessa atividade, sugerimos organizar a turma em grupos de 3 ou 4 estudantes, onde cada estudante pode escolher o grupo que desejar integrar, respeitando a quantidade de integrantes.

Inicialmente, será entregue pelo professor para cada grupo uma folha com os três retângulos impressos, como mostra a Figura 9 (essa folha está disponível no Apêndice C para impressão com as dimensões corretas):

Figura 9 – Retângulos



Fonte: Próprio autor

Após todos observarem os retângulos, sugerimos para o professor interagir com os grupos propondo questões norteadoras da seguinte maneira:

Primeira rodada de perguntas

1. Qual desses retângulos têm a maior área?
2. Qual seria o retângulo que possui a segunda maior área?
3. Qual retângulo tem a menor área?

Após ordenarem os retângulos de acordo com o tamanho da área, do maior ao menor, os grupos receberão também uma tabela para fazer algumas anotações.

Na primeira coluna anotarão a letra correspondente ao retângulo que foi escolhido (por observação do grupo) como sendo aquele que possui maior área; na segunda coluna, o comprimento desse retângulo, ou seja, a medida do lado vertical; na terceira coluna, a largura, que é a medida do lado horizontal e na quarta coluna, a área. Para completar a tabela utilizarão uma régua para a medição do comprimento e da largura e se acharem necessário podem utilizar a calculadora para o cálculo da área.

Com as medições obtidas, espera-se que encontrem que o retângulo A tem 4 cm de comprimento por 21 cm de largura, retângulo B, 10 cm por 15 cm e o retângulo C, 20 cm por 5 cm.

Um exemplo de tabela que pode ser fornecida é a Tabela 2, onde os estudantes deverão registrar as informações que encontraram após a medição desses retângulos, o cálculo de suas áreas e verificar se acertaram as escolhas feitas. Observa-se que o retângulo B é o que tem a maior área, logo depois é o C e o retângulo de menor área é o A.

Tabela 2 – Tabela de área

Retângulo	Comprimento	Largura	Área
B	10	15	150
C	20	5	100
A	4	21	84

Ainda em relação aos retângulos, o próximo passo é calcular o perímetro de cada um deles. Os valores encontrados serão anotados na segunda tabela que irão receber do professor. Um exemplo de tabela para essa etapa pode ser visualizada na Tabela 3:

Tabela 3 – Tabela de perímetro

Retângulo	Comprimento	Largura	Perímetro
B	10	15	50
C	20	5	50
A	4	21	50

Após os estudantes efetuarem seus cálculos é importante que todos percebam que temos diferentes tamanhos de comprimento e largura dos retângulos, mas todos possuem mesmo perímetro, nesse caso 50 cm.

Agora, como desafio, propõe-se a segunda rodada de perguntas norteadoras.

Segunda Rodada de Perguntas - Desafio

1. Você está cercando um campo retangular e só pode usar 50 metros de cerca. Quais possíveis medidas de comprimento e largura (diferentes das medidas dos retângulos A, B e C) pode possuir esse campo?
2. Será que existe alguma fórmula que nos ajude a encontrar as medidas dos lados dos retângulos que possuem um perímetro dado?

É importante discutir com a turma que os retângulos A, B e C foram medidos em centímetros, porém a unidade de medida pode ser alterada para metros se pensarmos que as figuras estão em uma escala de 1:100.

Aqui a intenção é fazer os estudantes pensarem que por ser um retângulo, considerando x seu comprimento, y sua largura e como o perímetro é 50 metros, então tem-se:

$$2x + 2y = 50$$

Ao dividir essa equação por 2, obtemos:

$$x + y = 25$$

ou seja, temos que somar dois valores e obter 25.

Tabela 4 – Tabela de área

Retângulo	Comprimento	Largura	Área
B	10	15	150
C	20	5	100
A	4	21	84
D	12	13	156
E	6	19	114
F	24	1	24

Tabela 5 – Tabela de perímetro

Retângulo	Comprimento	Largura	Perímetro
B	10	15	50
C	20	5	50
A	4	21	50
D	12	13	50
E	6	19	50
F	24	1	50

Agora os estudantes podem voltar às Tabelas 2 e 3 para completar com outros retângulos. Uma sugestão de preenchimento pode ser vista nas Tabelas 4 e 5:

Será que é possível encontrar alguma fórmula para determinar a área desses retângulos? Como resposta, o estudante pode pensar que se um lado mede x, então o outro lado mede $y = 25 - x$, ou seja, os valores de x que podem ser utilizados não devem ultrapassar o valor 25. Logo pode-se encontrar uma fórmula para determinar a área do retângulo de lado x e cujo perímetro é 50 m conforme (3.5):

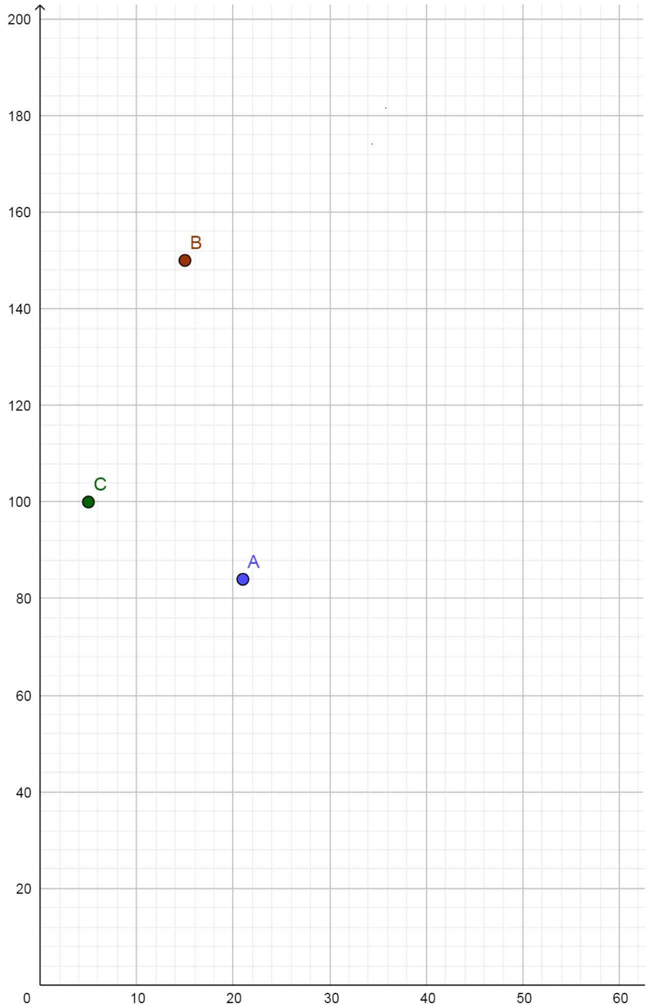
$$A = x(25 - x). \tag{3.5}$$

A próxima etapa da atividade consiste na construção de um gráfico, onde um estudante do grupo (com a ajuda dos seus colegas) fará o esboço em uma folha de papel milimetrado que irá receber.

Primeiramente, os estudantes irão traçar os eixos coordenados e marcar os pontos no Plano Cartesiano de forma que o Eixo das Abscissas corresponde a medida do comprimento do retângulo e o Eixo das Ordenadas a medida da área. Após marcar os pontos, solicite que desenhem uma curva que passa pelos pontos encontrados. Podendo marcar todos os pontos encontrados na Tabela 2.

Como exemplo dos pontos marcados tem-se a Figura 10.

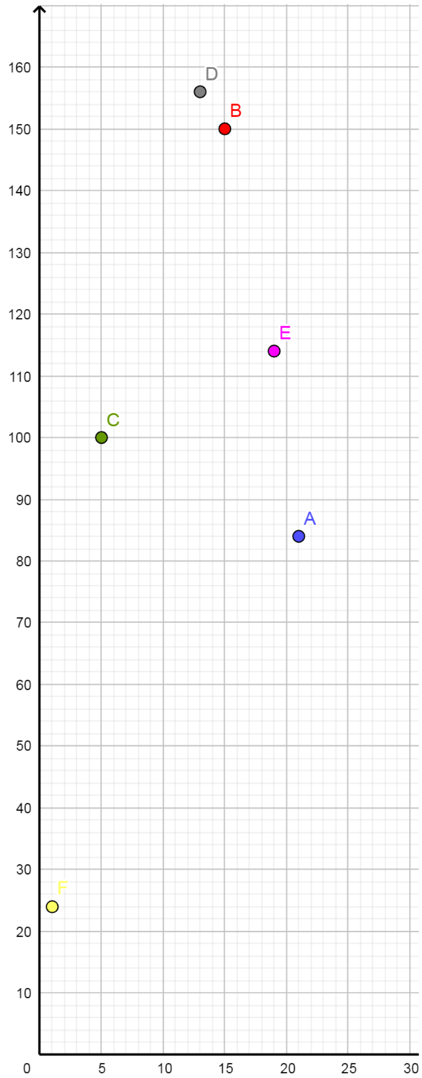
Figura 10 – Pontos marcados conforme a Tabela 2



Fonte: Próprio autor

Como exemplo de novos pontos marcados conforme a Tabela 4 tem-se a Figura 11.

Figura 11 – Pontos marcados



Fonte: Próprio autor

Caso algum aluno confunda-se e em vez do comprimento, marque no eixo coordenado a largura dos retângulos, isso não irá comprometer o desenvolvimento da atividade pois o gráfico não mudará muito, uma vez que a área do retângulo não muda.

A seguir, os alunos deverão traçar a curva que passa pelos pontos marcados no plano, de modo que a mesma seja do tipo gráfico de uma função em relação à variável x. Para isso, observe que só existe uma possibilidade de traço.

Terceira Rodada de Perguntas

1. Observando a curva que passa pelos pontos marcados, que tipo de função possui um gráfico que poderia ser associado a essa curva?

2. Como é possível justificar sua resposta para a questão anterior?

Observando a forma de como estão distribuídos os pontos esperamos que os estudantes percebam que não representa uma Função Afim, pois não é possível traçar uma reta que passa por todos os pontos marcados.

Uma possibilidade de explorar a equação de uma reta seria por meio da resolução de um sistema linear e do gráfico de uma Função Afim. A ideia é verificar se três dos pontos obtidos estão numa reta. Para isso, primeiramente tomar dois pontos encontrados anteriormente, por exemplo os pontos $A = (21, 84)$ e $B = (15, 150)$. Substituindo na equação da reta, a saber

$$y = ax + b,$$

onde a e b são números reais, $a \neq 0$, tem-se o sistema (3.6):

$$\begin{aligned} 84 &= 21a + b \\ 150 &= 15a + b. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Para resolvê-lo, basta multiplicar a segunda linha desse sistema por (-1):

$$\begin{aligned} 84 &= 21a + b \\ -150 &= -15a - b. \end{aligned}$$

Ao somar essas duas linhas, temos:

$$6a = -66 \Rightarrow a = -11.$$

Ao substituir o valor de $a = -11$ na equação $84 = 21a + b$ temos:

$$84 = 21 \cdot (-11) + b \Rightarrow 84 = -231 + b \Rightarrow b = 315.$$

Agora, temos a equação da reta que passa pelos pontos A e B: $y = -11x + 315$.

Sugerimos agora considerar um terceiro ponto, por exemplo $C = (5, 100)$ e verificar se ele pertence ou não a essa reta, ou seja, se quando $x = 5$, obtém-se $y = 100$.

Substituindo x por 5, tem-se:

$$\begin{aligned} 100 &\stackrel{?}{=} -11 \cdot 5 + 315 \\ 100 &\stackrel{?}{=} -55 + 315 \\ 100 &\neq 260. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Portanto, não temos uma reta que passa por esses três pontos. Note que a diferença entre 100 e 260 é considerável (o mesmo acontece para qualquer escolha dos pontos). Logo uma reta é uma aproximação ruim para a curva encontrada na atividade.

A curva também não representa o gráfico de uma Função Exponencial, pois é possível perceber que a mesma não é do tipo $y = a^x$, onde $a \neq 1$ e $a > 0$. O gráfico de uma Função Exponencial é sempre crescente ou decrescente, que não é o caso da curva obtida passando pelos pontos marcados no Plano Cartesiano. Outra possibilidade é encontrar possíveis valores para a (como foi feito na atividade Círculo de Moedas) e esboçar uma possível aproximação da curva.

Assim, desejamos concluir que a curva obtida pode ser associada ao gráfico de uma Função Quadrática, cuja lei é da forma:

$$y = -x^2 + 25x,$$

uma vez que as ordenadas dos pontos associados aos retângulos D, E e F foram obtidas por meio dessa equação. É possível verificar que os pontos A, B e C também satisfazem essa equação, isto é, pertencem à parábola $y = -x^2 + 25x$.

Podemos concluir que a curva representa o gráfico de uma Função Quadrática pois é um polinômio e o maior expoente da variável x é 2.

Como estamos falando em medida do comprimento do retângulo e sua área, o domínio $D(f)$ da função quadrática f cujo gráfico é a parábola $y = -x^2 + 25x$ está contido em $D(f) = \mathbb{R}_+$ e o contradomínio também será $\mathbb{R}_+$, pois só existem medidas positivas para ambos. É possível por meio do estudo do sinal do gráfico perceber que, para o problema da área que foi apresentado, o domínio da função é, mais precisamente o intervalo $[0, 25]$, pois para valores de x nesse intervalo temos valores positivos para a área. Assim, a imagem é o intervalo $[0, 156.25]$.

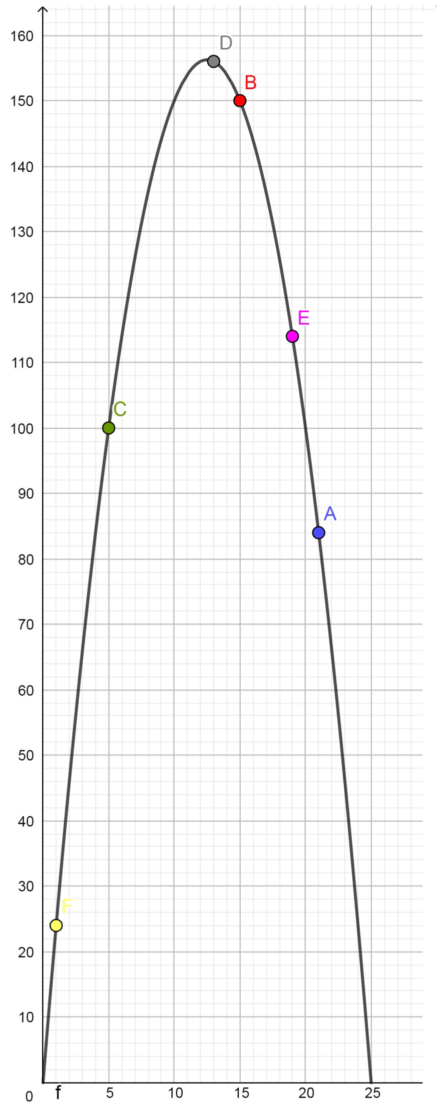
Nesse momento, sugerimos em conjunto com os estudantes, concluir que a função que representa o problema estudado é $f : [0, 25] \to \mathbb{R}_+$, onde $f(x) = -x^2 + 25x$.

Como desafio final, é possível ainda conversar com a turma sobre qual seria a medida de comprimento do campo retangular para que sua área seja máxima? O que significa esse ponto em relação ao gráfico?

É esperado que os estudantes localizem o ponto de máximo da parábola e verifiquem que o comprimento deve ser $x = 12,5$ m e a área máxima é $A = 156,25$ m^2.

A seguir temos um gráfico com os pontos marcados e a parábola obtida, na Figura 12.

Figura 12 – Pontos marcados e parábola



Fonte: Próprio autor

3.2.1 Atividade Retângulos na modalidade Online

Para aplicar essa atividade no formato online, primeiro os estudantes já devem ter recebido ou ter em mãos:

- os três retângulos;
- Tabela 1- Tabela de área;

- Tabela 2- Tabela de perímetro;
- primeira rodada de perguntas;
- uma régua;
- uma calculadora;
- uma folha de papel milimetrado;

É necessário que os estudantes imprimam a folha com os retângulos e façam as medições, após podem responder a primeira rodada de perguntas, para então completar as Tabelas 1 e 2 (tabela de área e de perímetro) conforme a ordem dos retângulos, obedecendo a ordem do maior ao menor segundo o tamanho da área. Na folha de papel milimetrado, solicite para que façam os eixos e marquem os pontos, lembrando que o Eixo das Abscissas corresponde a medida do comprimento do retângulo e o Eixo das Ordenadas a medida da área.

No encontro síncrono, o professor irá retomar o que fizeram para poder seguir a diante do mesmo jeito que no modelo de aula presencial.

4 Relato da Aplicação da Atividade Círculo de Moedas

No dia 6 de novembro de 2020, no turno da manhã, conversando com a professora Daiane que ministrava a Disciplina de Álgebra Linear do curso do PROFMAT, ela mencionou estar trabalhando com a turma de números e funções do curso de Licenciatura em Matemática e sugeriu que fosse aplicada a oficina do Círculo de Moedas nessa turma. No mesmo dia, na aula à tarde com a professora Cinthya (professora orientadora desse trabalho), foi finalizada a parte escrita da atividade que seria enviada aos alunos. No mesmo dia, recebi os e-mails dos alunos no qual enviei as orientações para o desenvolvimento da atividade de forma online.

O que estava programado para que os alunos fizessem?

Eles teriam que primeiramente recortar três círculos e vários círculos menores, que seriam as moedas. Após iriam verificar quantas moedas caberiam nos círculos e anotariam na tabela (que também foi enviada junto com os círculos) os valores encontrados.

Após o preenchimento dos círculos, iriam responder um formulário que foi feito com algumas perguntas no *Google forms*. Depois, teriam que clicar no link, que estava disponível para que marcassem os pontos na calculadora Gráfica da plataforma Desmos, nos quais o eixo das abscissas compreenderia o diâmetro dos círculos e no eixo das ordenadas, o número de moedas que foi utilizado para o preenchimento dos círculos. Em seguida, teriam que salvar a figura como imagem e desenhar uma curva que passasse pelos pontos marcados. Ficou acordado com a professora Daiane que no dia 12 de novembro às 20 h 40 min nós faríamos um encontro síncrono com a turma.

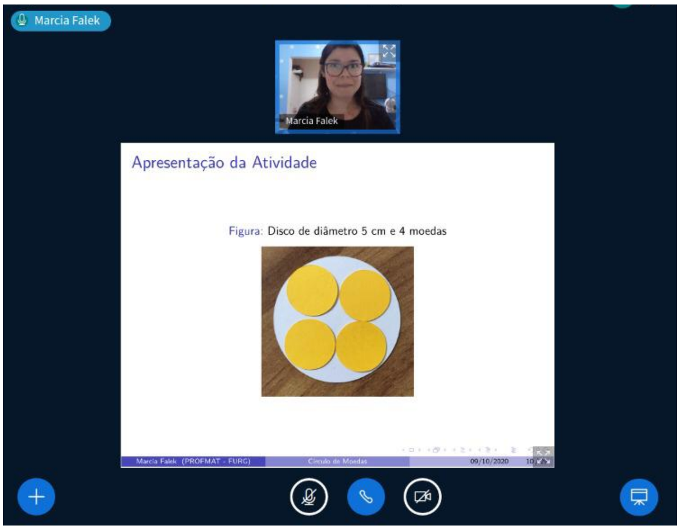
Até o dia 11 de novembro apenas 3 alunos da turma responderam ao questionário, mas para a minha surpresa no dia do encontro síncrono compareceram 8 alunos.

No início do encontro estavam presentes as professoras Cinthya, Daiane e eu. A professora Daiane apresentou-me para a turma. Comecei falando das turmas que trabalho e sobre ter a minha intensão de trabalhar sobre a Equação do Segundo Grau, até que cheguei nesse exercício que é apresentado em um formato diferente na plataforma Desmos. Neste encontro, comecei mostrando o círculo de 5 cm de diâmetro e uma moeda, perguntei:

Quantas moedas precisariam para o seu preenchimento?

Os alunos foram dando a sua opinião, com exceção desses três que já tinham feito, eles disseram: 5, 6, e 7. Logo após mostrei a minha figura no qual cabiam 4 moedas e comparei com a resposta de uma aluna que também encontrou esse número. Essa minha figura foi apresentada em um slide que estava aberto (conforme a Figura 13), no qual era a apresentação dessa atividade, então fui seguindo esses slides, mas sempre comparando com o número de moedas que uma aluna encontrou, pois foi uma maneira de todos interagirem.

Figura 13 – Fotos da apresentação



Fonte: Próprio autor

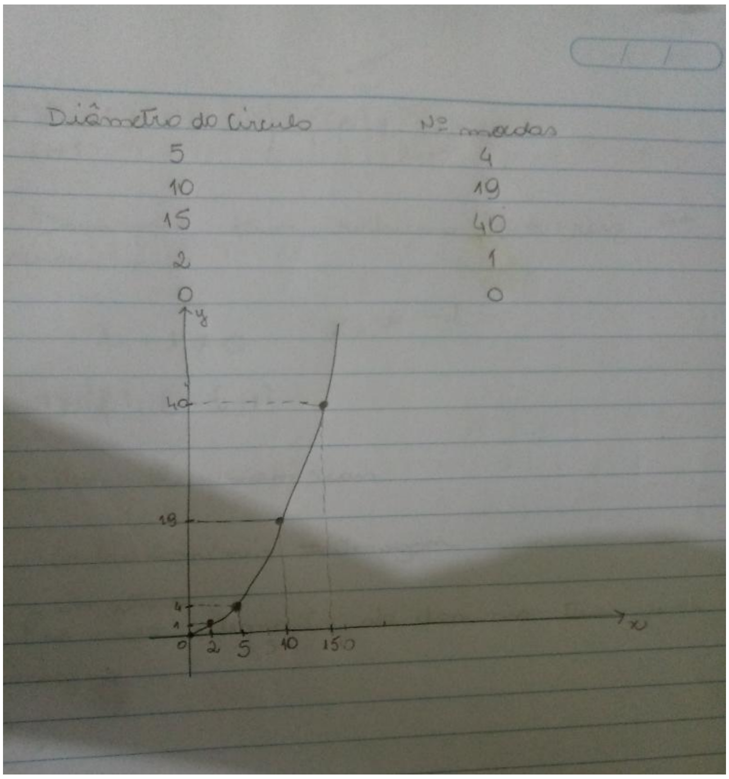
Mostrei a tabela, que teria que ser preenchida e o círculo com 10 cm de diâmetro. Ao fazer a pergunta se o número de moedas seria o dobro, pois estava dobrando o tamanho do diâmetro do disco, a resposta da maioria foi sim, mas um dos estudantes presentes disse: "vai dar mais até".

Então mostrei a segunda figura com 19 discos, e um aluno comentou no chat: "nossa". Segui então perguntando do terceiro círculo com 15 cm de diâmetro, mostrei a figura e cheguei nas perguntas sobre o que aconteceria se tivermos só um círculo de 2 cm e se não tivesse círculo (diâmetro zero), para que assim pudéssemos juntos encontrar os 5 pontos conforme descrito no capítulo que apresenta a atividade.

Foi quando perguntei se gostariam de marcar no Geogebra ou na calculadora gráfica da plataforma Desmos. Não houve interesse dos estudantes, então propus que pegassem uma folha do caderno e marcassem os pontos. Todos falaram que iriam marcar, esperei um pouco e fiz a pergunta: Que tipo de curva seria essa que passa por esses pontos?

Alguns escreveram parábola, outros meia-parábola, foi quando expliquei que realmente era uma parábola, mas que estamos lidando somente com o primeiro quadrante, justamente por tratarmos de variáveis número de moedas e tamanho do diâmetro. Mostrei a figura com os pontos marcados no GeoGebra. Na Figura 14 é possível ver a imagem enviada por uma das alunas que estava presente no encontro.

Figura 14 – Gráfico de uma aluna

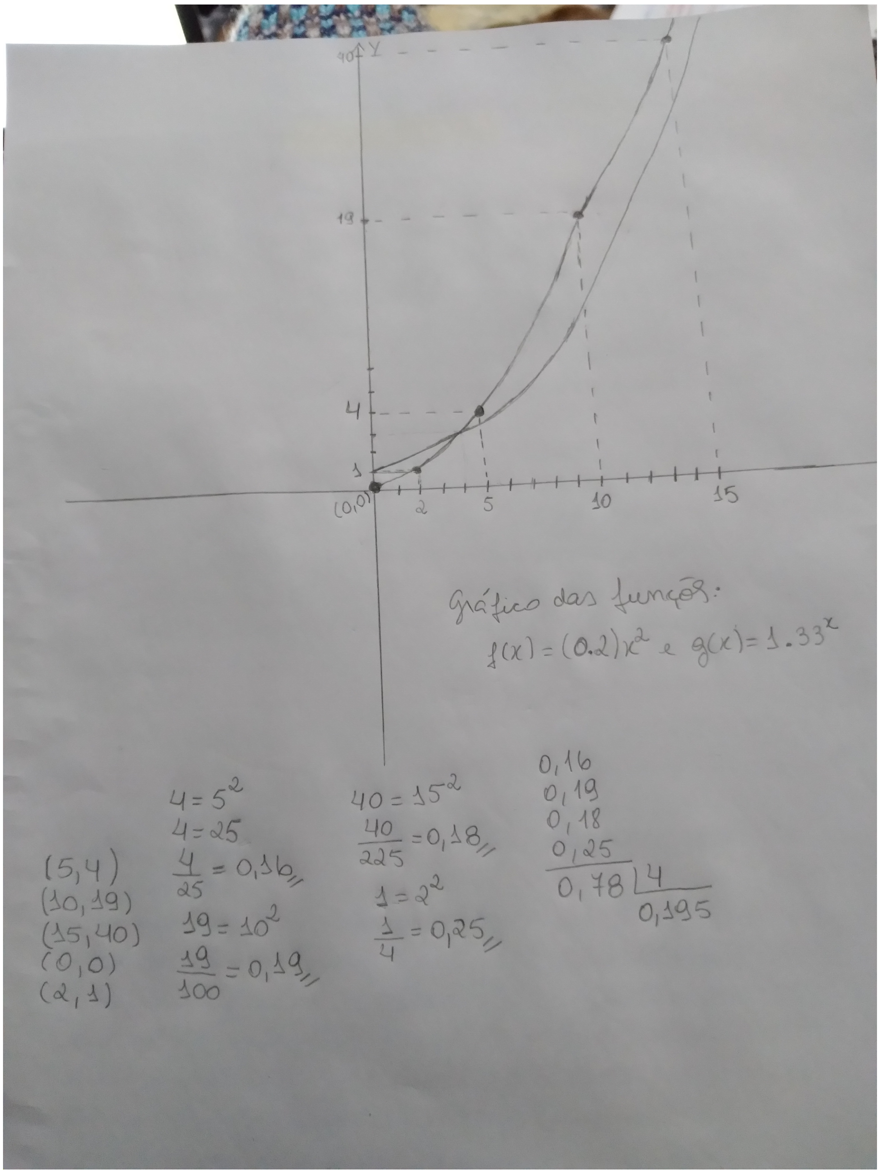


Fonte: Própria aluna

Após, comentei que poderíamos encontrar a equação de curva que passaria bem próxima, ou até por esses pontos. Para isso, retomei a fórmula da área do círculo e que para chegar a essa curva iria utilizar uma função $M(d) = ad^2$, onde M seria substituído pelo número de moedas e o d pelo diâmetro do círculo. Fazendo isso encontraríamos 5 possíveis valores para o coeficiente a.

Solicitei que me ajudassem a calcular cada um dos possíveis a. Após o cálculo os estudantes fizeram a média entre os valores encontrados. Na Figura 15 é possível os cálculos enviados por um dos estudantes.

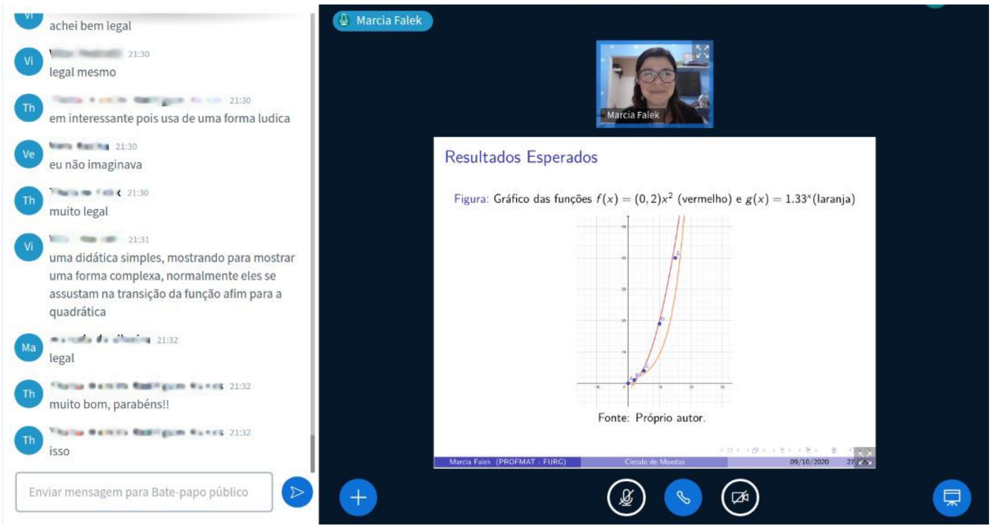
Figura 15 – Um outro gráfico



Fonte: Próprio Aluno

Em seguida mostrei para os estudantes a figura da curva passando pelos pontos (Figura 16). Eles elogiaram e comentaram que gostaram muito do trabalho. Então a titulo de curiosidade fui mostrando o resto dos slides no qual mostravam que a curva não seria gráfico de uma Função Afim, nem a Exponencial, pois não se aproximavam tanto dos pontos encontrados.

Figura 16 – Uma outra foto



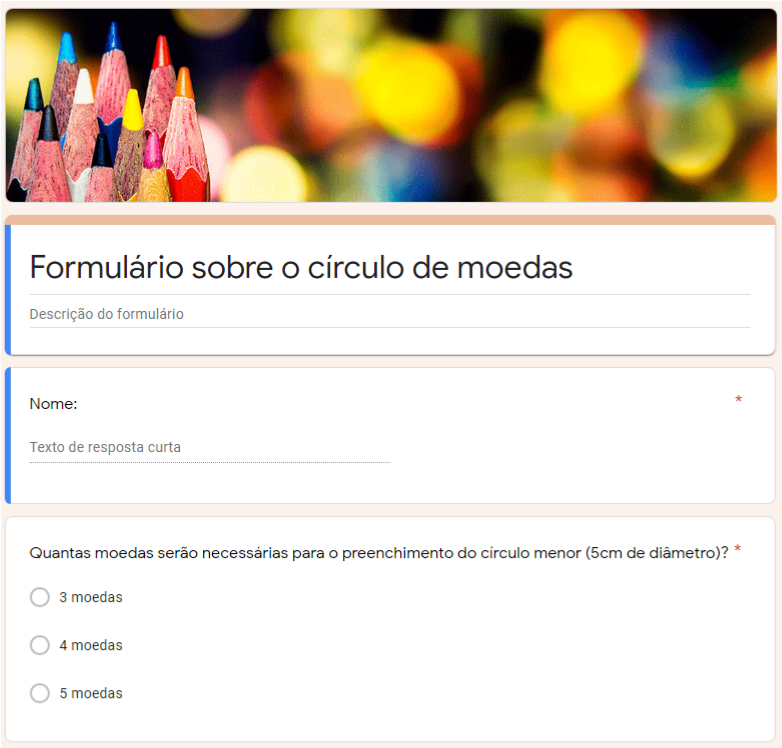
Fonte: Próprio autor

No final do encontro fiz a pergunta: O que acharam da atividade?

Também da Figura 16 é possível observar alguns comentários dos estudantes: "achei bem legal", interessante pois usa de uma forma lúdica", "muito legal", "uma didática simples, servindo para mostrar uma forma complexa, normalmente eles se assustam na transição da função afim para a quadrática", "legal", "muito bom, parabéns!", "muito legal seu trabalho, parabéns", "foi uma maneira de aprender brincando".

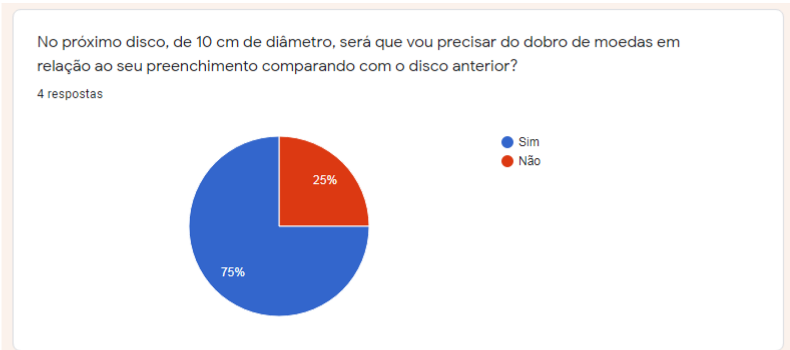
Nas Figuras 17 e 18 são apresentadas as respostas dos estudantes ao formulário do Google. Aparecem quatro respostas, sendo três delas de estudantes e uma delas respondida por mim a fim de testar o formulário antes de enviar para os estudantes.

Figura 17 – Formulário sobre o Círculo de moedas



Fonte: Próprio Autor

Figura 18 – Formulário sobre o Círculo de moedas



Fonte: Próprio Autor

No próximo capítulo discutimos as possíveis continuações ou desdobramentos do trabalho.

5 Possíveis continuações ou desdobramentos

Ao escrever essas duas atividades sobre a Função Quadrática, fui percebendo a importância de trabalhar de forma lúdica e investigativa. Além disso, seu desenvolvimento pode ser ampliado da maneira que o professor achar mais conveniente, pois ambas as atividades vão envolvendo e fazendo com que o estudante chegue a um possível resultado, mas também de grande importância para que consigam diferenciar os tipos de funções.

Quando comecei a pensar no que gostaria de escrever, primeiramente imaginei o tema de Equação do Segundo Grau, pois são poucas as maneiras de encontrar um modo diferente e lúdico de resolvê-las. Na procura de possíveis atividades acabei descobrindo possibilidades sobre o ensino da Função Quadrática que ao escrever sobre o assunto fui ficando cada vez mais encantada com esse desenvolvimento.

A atividade dos retângulos foi apresentada online no formato de comunicação científica no I Colóquio de Matemática do Pampa (<https://eventos.unipampa.edu.br/cmp/2021/02/25/ola-mundo/>) organizado pela Universidade Federal do Pampa (UNIPAMPA), no dia 5 de abril deste ano. A apresentação foi assistida ao vivo por cerca de cem participantes, e está disponível em <https://youtu.be/gPN_jxfRF3w?t=12724>. Já a atividade do Círculo de moedas, está submetida no formato de artigo para uma revista.

Ainda sobre essas duas atividades, elas foram de grande importância para a compreensão da metodologia escolhida, principalmente nas rodadas de perguntas, pois por meio dos questionamentos que foram surgindo e das suas conclusões que deixam sempre uma sensação de contentamento. Espero que ao aplicar essas atividades com estudantes do Ensino Básico, possa esclarecer a diferença das funções, além de motivar uma outra maneira de trabalhar com o assunto Função Quadrática.

Como um possível continuação, poderíamos pensar na atividade do retângulo, porém de uma outra maneira:

1. Você está cercando um campo retangular, sendo composta de uma parede e três cercas e só pode usar 60 metros de cerca. Quais possíveis medidas de comprimento e largura pode possuir esse campo?

   Como uma possível resultado poderíamos pensar como x sendo o comprimento e y a largura, logo temos:

$$2x + y = 60$$

Ao isolar y, encontramos:

$$y = 60 - 2x.$$

Assim, de forma similar o que foi feito na atividade descrita nesse trabalho, o estudante pode substituir valores em x e encontrar valores para y, podendo também preencher uma tabela com esses dados, marcar os pontos, encontrar quais as dimensões dão origem a um terreno de área máxima e ainda estudar o gráfico da Função Quadrática associada ao problema.

6 Considerações finais

Considerando as atividades apresentadas nesse trabalho, espero poder ter desenvolvido uma proposta que motive professores e estudantes para o estudo da Função Quadrática, além de uma alternativa para retomar suas propriedades e também diferenciá-la das outras funções.

Refletindo sobre a fala do autor João Pedro da Ponte (PONTE et al., 1998), fica ainda mais evidente a investigação como parte do desenvolvimento das atividades, pois foi através dos seus questionamentos que foi possível dar uma certa direção nas atividades. Já os autores Ferruzzi e Costa (FERRUZZI; COSTA, 2018), incentivam o professor a trabalhar com as atividades de investigação.

Conforme Mendonça (2010), trabalhar de forma lúdica vai motivar o interesse de todos os educandos, tornando a disciplina mais interessante e atrativa. Segundo Chas (2014), não existe uma única maneira de ensinar, para tornar o ensino mais interessante, o professor deve diversificar essas aulas. Concordando, também Cunha e Silva (2012) incentiva com a ferramenta de uma Matemática lúdica, pois irá ajudar muito o aluno a adquirir o conhecimento.

As duas atividades são propostas para serem trabalhadas em grupos de acordo com Loiola (2009), pois os alunos aprendem com essa troca de informações e com isso tornar possível atingir os objetivos das atividades.

Finalizo este trabalho com uma sensação de satisfação em relação à escrita, pois a cada releitura fico encantada com o formato final que foi construído. Considero que pode sim fazer uma diferença para os professores, já quanto aos alunos, acredito que serão envolvidos com a proposta e perceberão também essa diferença. Agora respondendo a pergunta proposta na introdução desse trabalho: como podemos reconhecer a Função Quadrática numa situação problema? Acredito que, utilizando a Investigação Matemática juntamente com o material concreto nas atividades, foi possível apresentar duas situações problema em que o estudante pode identificar e construir a Função Quadrática.

Referências

BRASIL. *Base Nacional Comum Curricular - Ensino Médio*. Brasília, 2018. 150 p. Citado na página 15.

BRITO, L. A. L. *Uma proposta de sequência didática para o ensino de função quadrática por meio da construção de ponte de palitos*. Dissertação de Mestrado, 2019. Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=170100043>. Acesso em: 26.02.2021. Citado na página 17.

CHAS, D. M. P. Matemática e atividades lúdicas: uma metodologia diferenciada. In: *I Simpósio Edução Matemática em Debate*. Joinvile - SC: [s.n.], 2014. v. 1, p. 93–103. Citado 2 vezes nas páginas 21 e 53.

CUNHA, J. S. da; SILVA, J. A. V. da. A importância das atividades lúdicas no ensino da matemática. *Escola de Inverno de Educação Matemática*, 2012. Citado 2 vezes nas páginas 21 e 53.

DANTE, L. R. *Matemática Contexto & Aplicações*. São Paulo: Ática, 2013. v. 1. Citado 2 vezes nas páginas 19 e 35.

DIGITAL, P. *Investigação Matemática: o que é , porque e como fazer*. Tecnologia Digital, 2017. Disponível em: <https://tecnologia.educacional.com.br/blog-pense-matematica/investigacao-matematica-o-que-e-porque-e-como-fazer/>. Acesso em: 08.03.2021. Citado na página 20.

FERRUZZI, E. C.; COSTA, J. A. A. da. Investigação matemática e seu aporte para a aprendizagem. In: *Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia*. [S.l.: s.n.], 2018. v. 11, p. 296–311. Citado 3 vezes nas páginas 20, 21 e 53.

KOSLOSKI, C. *Função quadrática: Uma proposta para o Ensino Médio*. Dissertação de Mestrado, 2018. Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=161010053>. Acesso em: 26.02.2021. Citado na página 18.

LOIOLA, R. *As trocas que fazem a turma avançar*. Nova Escola, 2009. Disponível em: <https://novaescola.org.br/conteudo/366/as-trocas-que-fazem-a-turma-avancar>. Acesso em: 22.02.2021. Citado 3 vezes nas páginas 21, 22 e 53.

MENDONÇA, S. R. P. de. A matemática nas turmas de proeja: O lúdico como facilitador da aprendizagem. *HOLOS*, v. 3, n. 26, p. 136–148, 2010. Citado 2 vezes nas páginas 21 e 53.

PONTE, J. P. da et al. O trabalho do professor numa aula de investigação matemática. *Quadrante*, v. 1, n. 2, p. 41–70, 1998. Citado na página 53.

PRADO, E. M. dos Santos do. *Um novo olhar sobre o ensino de equação e função do segundo grau*. Dissertação de Mestrado, 2014. Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=460>. Acesso em: 26.02.2021. Citado na página 17.

SOUZA, J. R. de; GARCIA, J. *Matemática: Novo Olhar*. São Paulo: FTD, 2016. v. 1. Citado na página 19.

Apêndices

APÊNDICE A – Material do Aluno: Atividade Círculo de Moedas

Primeira rodada de perguntas

1. Quantas moedas serão necessárias para o seu preenchimento?

2. Será que é o dobro de moedas em relação ao disco anterior?

Segunda rodada de perguntas

1. Se tenho um círculo de 2 cm, que é o tamanho da moeda, quantas moedas vou precisar para preenchê-lo?

2. Se não tenho nenhum círculo, vou precisar de moedas?

Terceira rodada de perguntas

1. Que tipo de curva é essa?

2. Será que ela se parece com o gráfico de uma função afim, ou do segundo grau, ou será de uma função exponencial?

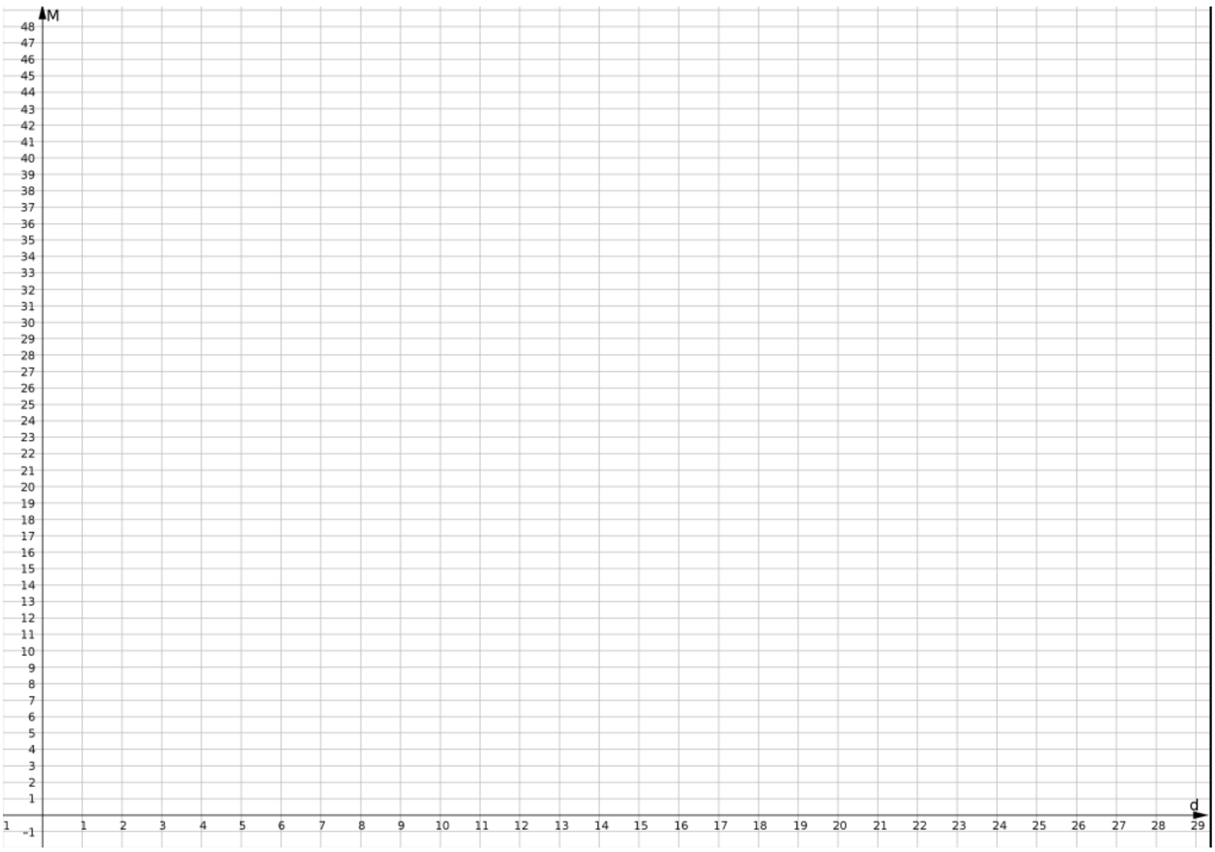
3. De forma equivalente: a curva que passa pelos pontos marcados pode ser uma reta? Pode ser uma parábola?

4. O que levou você a chegar a esse resultado?

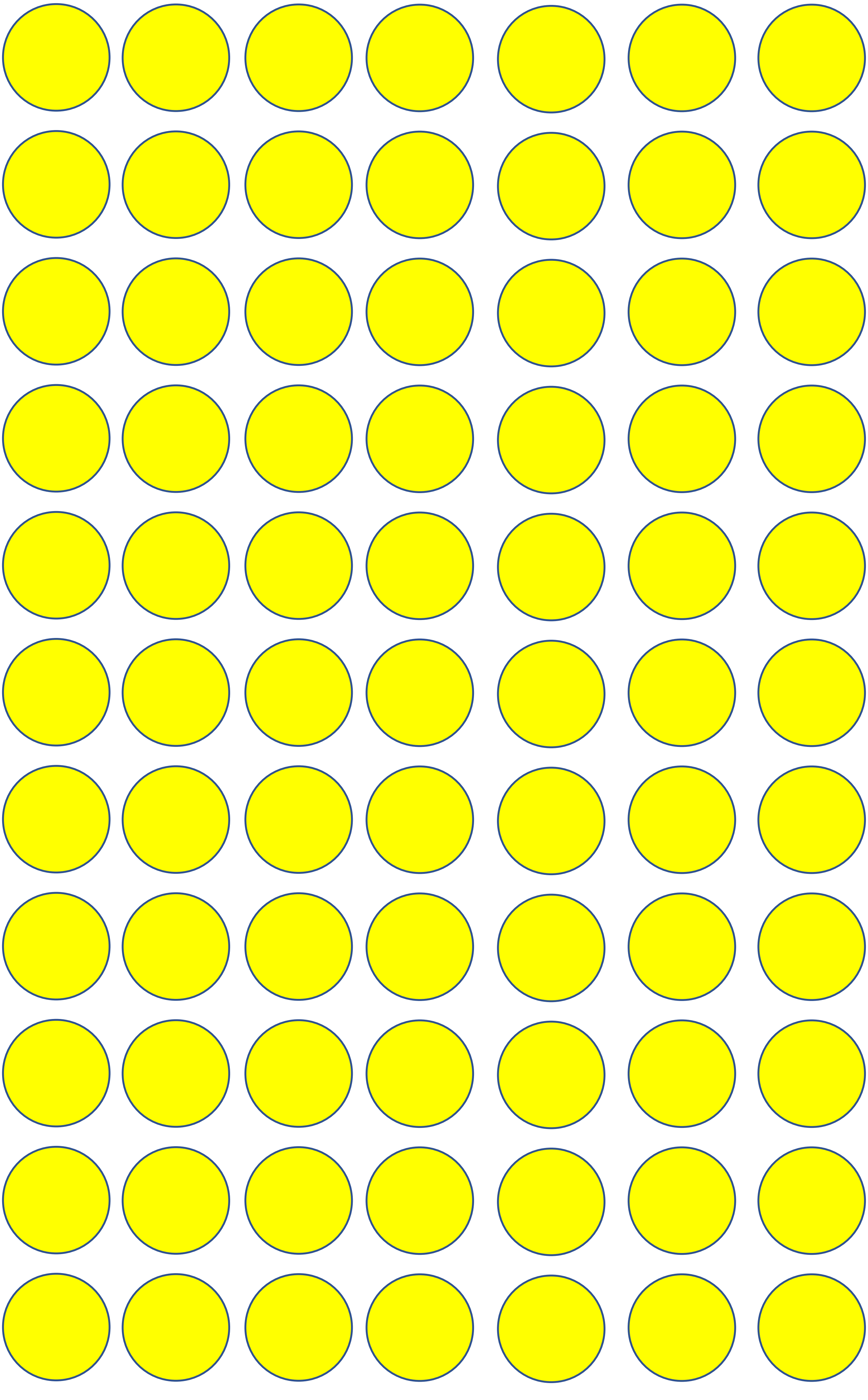
Tabela 1 – Tabela Diâmetro x Número de moedas

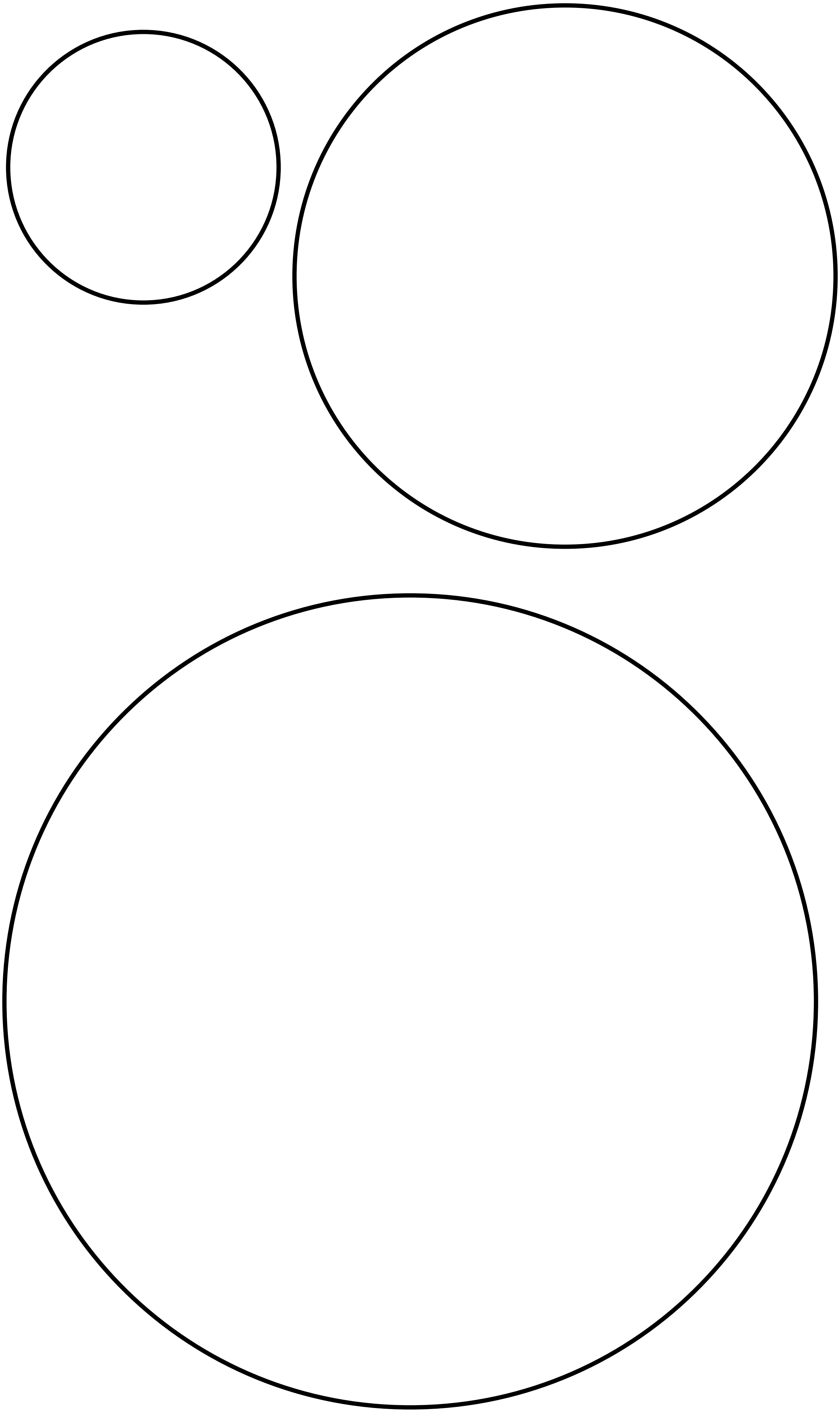
Diâmetro do Círculo	Número de moedas

Figura 1 – Plano Cartesiano



Fonte: Próprio autor

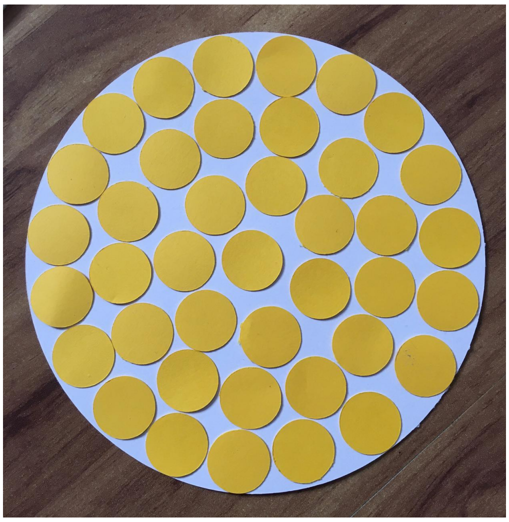




APÊNDICE B – Material do Aluno no formato online Atividade Círculo de Moedas

1. Recortar os discos e as moedas amarelas;
2. Separar o círculo de diâmetro 5 cm e preencher esse círculo com as moedas (que são os círculos de diâmetro 2 cm), tentando sobrepor o mínimo as moedas. É importante observar que uma sobreposição considerável das moedas pode comprometer o resultado esperado para a realização da atividade. Um exemplo de círculo preenchido está na Figura 2;

Figura 2 – Disco de diâmetro preenchido com as moedas



Fonte: Próprio autor

3. Na Tabela, fazer as seguintes anotações: na primeira coluna o diâmetro do círculo e na segunda coluna, o número de moedas que foram utilizadas para preencher esse círculo;
4. Fazer o mesmo com os outros círculos e anotar na Tabela o resultado encontrado para o seu preenchimento;
5. Após realizar os itens anteriores, responder o google formulário que se encontra clicando nesse link: <https://forms.gle/gBjqr2hF8vtRo8Y87>;

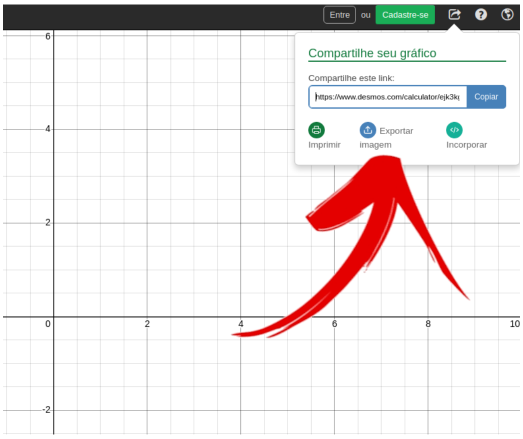
6. Marcar os pontos da Tabela usando na Calculadora Gráfica Desmos, clicando no link: <https://www.desmos.com/calculator?lang=pt-BR>. Os pontos marcados possuirão como abscissa o diâmetro do círculo e ordenada o número de moedas utilizado para preencher esse círculo;

7. Responder a pergunta: qual curva conhecida você acredita que poderia ser esboçada passando pelos pontos marcados?

8. Desafio: desenhar uma curva passando pelos pontos marcados.

Se você estiver usando um notebook, não esqueça de clicar (na Calculadora Gráfica da plataforma Desmos) em Compartilhar o Gráfico e depois Exportar Imagem, como indicado na Figura 3. Salve a imagem dos pontos marcados para discutirmos no encontro síncrono. Se estiver usando o celular, para salvar a imagem é necessário criar um login e senha na plataforma.

Figura 3 – Como salvar uma imagem na Calculadora Gráfica da plataforma Desmos



Fonte: Próprio autor

Marcar as atividades para serem realizadas até um dia antes do encontro síncrono.

A tabela, os discos e as moedas que serão utilizados na atividade encontram-se no Apêndice A.

APÊNDICE C – Material do Aluno: Atividade dos Retângulos

A

B

C

Primeira rodada de perguntas

1. Qual desses retângulos têm a maior área?
2. Qual seria o retângulo que possui a segunda maior área?
3. Qual retângulo tem a menor área?

Segunda Rodada de Perguntas - Desafio

1. Você está cercando um campo retangular e só pode usar 50 metros de cerca. Quais possíveis medidas de comprimento e largura (diferentes das medidas dos retângulos A, B e C) pode possuir essa campo?
2. Será que existe alguma fórmula que nos ajude a encontrar as medidas dos lados dos retângulos que possuem um perímetro dado?

Terceira Rodada de Perguntas

1. Observando a curva que passa pelos pontos marcados, que tipo de função possui um gráfico que poderia ser associado a essa curva?
2. Como é possível justificar sua resposta para a questão anterior?

Tabela 1 – Tabela de área

Retângulo	Comprimento	Largura	Área

Tabela 2 – Tabela de perímetro

Retângulo	Comprimento	Largura	Perímetro