

Patrícia Inklman Cesário

**Uma Proposta de Atividade Introdutória à
Geometria Usando Poliedros de Canudos e
Película de Sabão**

Rio Grande, Rio Grande do Sul, Brasil

Julho, 2017

Patrícia Inklman Cesário

Uma Proposta de Atividade Introdutória à Geometria Usando Poliedros de Canudos e Película de Sabão

Trabalho de Conclusão de Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT submetido por Patrícia Inklman Cesário junto ao Instituto de Matemática, Estatística e Física da Universidade Federal do Rio Grande.

Universidade Federal do Rio Grande - FURG

Instituto de Matemática, Estatística e Física - IMEF

Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

Orientador: Dra. Bárbara Denicol do Amaral Rodriguez

Coorientador: Dra. Fabíola Aiub Sperotto

Rio Grande, Rio Grande do Sul, Brasil

Julho, 2017

Ficha catalográfica

C422p Cesário, Patrícia Inklman.
Uma proposta de atividade introdutória à geometria usando poliedros de canudos e película de sabão / Patrícia Inklman Cesário. – 2017.
94 p.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Rio Grande – FURG, Programa de Pós-graduação em Matemática, Rio Grande/RS, 2017.

Orientadora: Dr^a. Bárbara Denicol do Amaral Rodriguez.

Coorientadora: Dr^a. Fabíola Aiub Sperotto.

1. Geometria 2. Poliedros de canudos 3. Película de sabão
4. Conceitos geométricos I. Rodriguez, Bárbara Denicol do Amaral
II. Sperotto, Fabíola Aiub III. Título.

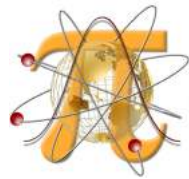
CDU 514.12:37

Colaboradores



UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE

<http://www.furg.br>



INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E FÍSICA

<http://www.imef.furg.br>



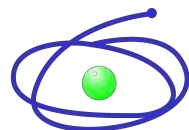
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

<http://www.profmat-sbm.org.br>



SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

<http://www.sbm.org.br>



COORDENAÇÃO DE APERFEIÇOAMENTO DE PESSOAL DE NÍVEL SUPERIOR

<http://www.capes.gov.br>

Patrícia Inklman Cesário


Uma Proposta de Atividade Introdutória à Geometria Usando Poliedros de Canudos e Película de Sabão

Trabalho de Conclusão de Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT submetido por Patrícia Inklman Cesário junto ao Instituto de Matemática, Estatística e Física da Universidade Federal do Rio Grande.

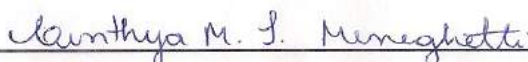
Trabalho aprovado. Rio Grande, 07 de julho de 2017.



Dra. Bárbara Denicol do Amaral
Rodriguez
(Orientador - FURG)



Dra. Fabíola Aiub Sperotto
(Coorientadora - FURG)



Dra. Cinthya Maria Schneider
Meneghetti
(Avaliador - FURG)



Me. Mariângela Andrade Martinatto
(Avaliador - IFRS/Campus Rio Grande)

Rio Grande, Rio Grande do Sul, Brasil
Julho, 2017

Agradecimentos

Quero agradecer, primeiramente, às orientadoras Dra. Bárbara Denicol do Amaral Rodriguez e Dra. Fabíola Aiub Sperotto pela imensa ajuda. Certamente, sem o incentivo destas dedicadas profissionais, este trabalho não teria sido concluído.

Agradeço a toda a família, os que estão perto e os que, mesmo longe, me apoiaram nesta jornada.

Quero agradecer, especialmente, à minha filha Marina Comin Cesário e ao meu esposo Miguel Ângelo Ribeiro Cesário, pelo apoio incondicional e compreensão de minha ausência em muitos momentos.

Um agradecimento especial aos colegas do PROFMAT Gabriela Gimenes Pereira e Lucas de Souza Barbosa pelo companheirismo e amizade.

Agradeço à Escola Ana Neri, principalmente aos meus queridos alunos, pelas indispensáveis contribuições.

À CAPES pelo apoio financeiro.

“A Matemática é linda.”
(Planta)

Resumo

Esta dissertação apresenta propostas de atividades utilizando poliedros de canudos e película de sabão para introdução de conceitos geométricos no ensino fundamental. As atividades compreendem pesquisa na internet e em livros didáticos, construções dos poliedros com canudos e a experiência de imersão dos mesmos na solução de água e detergente. Dispõem-se as recomendações metodológicas, bem como o relato da aplicação e a análise dos resultados das atividades propostas. São apresentados também, a pesquisa matemática dos conceitos de Geometria Plana e Espacial pertinentes às atividades e, em seguida, discute-se como a Geometria vem sendo abordada pelos PCNs e livros didáticos, sua importância para a Matemática, bem como o uso de material concreto no processo de ensino-aprendizagem.

Palavras-chaves: Geometria, Poliedros de Canudos, Película de Sabão, Conceitos Geométricos.

Abstract

This dissertation presents proposals of activities using polyhedrons of straws and soap film for the introduction of geometric concepts in the elementary School. The activities comprise research on the internet and in textbooks, polyhedrons constructions with straws, and the experience of immersion in the solution of water and detergent. The methodological recommendations, as well as reporting on the application and results of the proposed activities. Also presented are the mathematical research on the concepts of relevant Plane and Space Geometry to the activities, and then discusses how Geometry has been shown by the PCNs and textbooks, their importance for Mathematics, as well as the use of concrete material in the teaching-learning process.

Key-words: Geometry, Polyhedron of Straws, Soap Film, Geometric Concepts.

Lista de ilustrações

Figura 1 – O ponto A	20
Figura 2 – A reta r	21
Figura 3 – O plano α	21
Figura 4 – A reta r	22
Figura 5 – Pontos pertencentes ao plano α e pontos não pertencentes ao plano α .	22
Figura 6 – A reta \overleftrightarrow{AB}	23
Figura 7 – O plano $\alpha = (A, B, C)$	23
Figura 8 – Reta $r = \overleftrightarrow{AB}$ contida no plano α	24
Figura 9 – Retas concorrentes	24
Figura 10 – Retas paralelas	24
Figura 11 – Segmento de reta AB	25
Figura 12 – Semirreta \overrightarrow{AB}	25
Figura 13 – Interseção de dois planos $\alpha \cap \beta = \overleftrightarrow{AB}$	26
Figura 14 – Interseção de três planos - uma única reta	27
Figura 15 – Interseção de três planos - um ponto	27
Figura 16 – Interseção de três planos - três retas paralelas	28
Figura 17 – Região convexa (esq.) e região não convexa (dir.)	28
Figura 18 – Reta: um exemplo de conjunto convexo de pontos	29
Figura 19 – Semiplanos determinados por uma reta	29
Figura 20 – Regiões angulares no plano	29
Figura 21 – Ângulos consecutivos	30
Figura 22 – Ângulos adjacentes	30
Figura 23 – Ângulos opostos pelo vértice	31
Figura 24 – Bissetriz de um ângulo	31
Figura 25 – Ângulo suplementar adjacente	32
Figura 26 – Ângulo reto, agudo e obtuso	32
Figura 27 – Triângulo ABC	34
Figura 28 – Triângulo equilátero, isóceles e escaleno	35
Figura 29 – Triângulos acutângulo (esq.), retângulo (centro) e obtusângulo (dir.) .	35
Figura 30 – Polígono convexo de seis vértices	36
Figura 31 – Polígono convexo (esq.) e polígono côncavo (dir.)	38
Figura 32 – Quadrilátero equilátero (esq.), quadrilátero equiângulo (centro), quadrilátero regular (dir.)	38
Figura 33 – Poliedro convexo (esq.) e poliedro não convexo (dir.)	39
Figura 34 – Poliedros eulerianos: convexo (direita) e não convexo (esquerda)	40
Figura 35 – Poliedros regulares	41

Figura 36 – Prisma	41
Figura 37 – Pirâmide	43
Figura 38 – Pirâmide regular	44
Figura 39 – Tetraedro regular	44
Figura 40 – Lista de exercícios	47
Figura 41 – Presença de ângulos no cotidiano	49
Figura 42 – Construção do tetraedro	54
Figura 43 – Construção do octaedro	55
Figura 44 – Imersão dos poliedros no líquido de bolhas	55
Figura 45 – Materiais necessários para construção do tetraedro	59
Figura 46 – Materiais necessários para construção dos poliedros	61
Figura 47 – Arames cortados (esquerda) e arames dobrados (direita)	63
Figura 48 – Alunos no laboratório de informática	66
Figura 49 – Respostas de um aluno na pesquisa na internet	68
Figura 50 – Respostas condizentes com as esperadas	68
Figura 51 – Objetos semelhantes a poliedros - Sexto ano A	70
Figura 52 – Aluno construindo o tetraedro	70
Figura 53 – Atividade: relacionando conceitos geométricos	71
Figura 54 – Construção do prisma	72
Figura 55 – Aluno criando estratégias para construção do octaedro	73
Figura 56 – Colaboração na construção do cubo	73
Figura 57 – Resultados da atividade Aprendendo Conceitos Geométricos	74
Figura 58 – Películas formadas no interior do tetraedro	75
Figura 59 – Películas formadas no interior do prisma triangular	76
Figura 60 – Películas formadas no interior do prisma pentagonal	76
Figura 61 – Bolha quadrada	77
Figura 62 – Construção do glossário - sexto ano B	78
Figura 63 – Resposta aluno 1	80
Figura 64 – Resposta aluno 2	80
Figura 65 – Resposta aluno 3	81
Figura 66 – Resposta aluno 4	81
Figura 67 – Sugestão aluno 5	81
Figura 68 – Sugestão aluno 6	81
Figura 69 – Sugestão aluno 7	81
Figura 70 – Sugestão aluno 8	82
Figura 71 – Passo a passo para construção do tetraedro	94
Figura 72 – Passo a passo para construção do octaedro	94
Figura 73 – Passo a passo para construção do hexaedro	95

Lista de tabelas

Tabela 1 – Nomes especiais dados aos polígonos quanto ao número n de lados . . .	37
Tabela 2 – Características dos poliedros de Platão	40
Tabela 3 – Quantidade de materiais para construção dos poliedros	62
Tabela 4 – Quantidade de películas no interior dos poliedros	76
Tabela 5 – Livros utilizados para elaboração do glossário	78
Tabela 6 – Sexto ano A	79
Tabela 7 – Sexto ano B	80
Tabela 8 – Oitavo ano	80

Sumário

	Introdução	15
1	OBJETIVOS	18
1.1	Objetivos gerais	18
1.2	Objetivos específicos	18
2	GEOMETRIA EUCLIDIANA PLANA E ESPACIAL	20
2.1	Noções primitivas	20
2.1.1	Ponto	20
2.1.2	Reta	20
2.1.3	Plano	21
2.2	Proposições e definições primitivas	21
2.3	Interseção de planos	25
2.4	Ângulos	28
2.4.1	Definições	28
2.4.2	Ângulos congruentes	31
2.4.3	Bissetriz	31
2.4.4	Características e medidas de um ângulo	32
2.4.4.1	Suplemento adjacente	32
2.4.4.2	Ângulo reto, agudo e obtuso	32
2.4.4.3	Medida de um ângulo	33
2.4.4.4	Ângulos complementares, suplementares e replementares	33
2.4.4.5	Ângulo nulo e ângulo raso	33
2.5	Triângulos	33
2.5.1	Elementos de um triângulo	34
2.5.2	Classificação dos triângulos	34
2.6	Polígonos	35
2.6.1	Elementos de um polígono	36
2.6.2	Classificação dos polígonos	37
2.7	Poliedros convexos	38
2.7.1	Elementos de um poliedro	39
2.7.2	Classificação dos poliedros	39
2.7.2.1	Relação de Euler e poliedros eulerianos	39
2.7.2.2	Poliedros de Platão	40
2.7.2.3	Poliedros regulares	41
2.7.2.4	Prismas	41

2.7.2.5	Pirâmides	43
3	O ENSINO DE GEOMETRIA	45
3.1	Como os PCNs abordam o ensino da Geometria	45
3.2	Análise de livros didáticos: Uma comparação de livros de diferentes décadas	46
3.3	Importância da Geometria na Escola Fundamental	50
3.4	Aspectos relevantes no ensino de Matemática - Como a Geometria e o uso de material concreto podem contribuir para um aprendizado significativo	51
4	SONDAGEM SOBRE A ACEITAÇÃO DA ATIVIDADE E MOTIVAÇÃO PARA TORNAR ESTA DINÂMICA UMA ATIVIDADE DIDÁTICA	54
5	PROPOSTA DE ATIVIDADES PARA EXPLORAR CONCEITOS GEOMÉTRICOS BÁSICOS	57
5.1	Conteúdos explorados	57
5.2	Público Alvo	57
5.3	Local de aplicação da atividade	57
5.4	Avaliação dos alunos	58
5.5	Recomendações metodológicas	58
5.5.1	Aula 1 - Pesquisa na internet	58
5.5.2	Aula 2 - Construção do tetraedro	59
5.5.3	Aula 3 - Construção dos demais poliedros	61
5.5.4	Aula 4 - Imersão dos poliedros na solução de água e detergente	63
5.5.5	Aula 5 - Elaboração de um glossário e questionário de satisfação	64
5.6	Resultados esperados	64
6	RELATO DA APLICAÇÃO E ANÁLISE DOS RESULTADOS	66
6.1	Aula 1	66
6.2	Aula 2	69
6.3	Aula 3	71
6.4	Aula 4	74
6.5	Aula 5	77
7	CONCLUSÕES	83
	REFERÊNCIAS	86

APÊNDICES	89
APÊNDICE A – PESQUISA NA INTERNET	90
APÊNDICE B – RELACIONANDO CONCEITOS GEOMÉTRICOS	91
APÊNDICE C – APRENDENDO CONCEITOS GEOMÉTRICOS .	92
APÊNDICE D – QUESTIONÁRIO DE SATISFAÇÃO	93
APÊNDICE E – PASSO A PASSO	94

Introdução

O estudo da Geometria é um tema pelo qual os alunos costumam se interessar naturalmente (BRASIL, 1998). No entanto, em se tratando de Geometria tridimensional, a abstração costuma apresentar um alto grau de dificuldade, não só por parte dos alunos, como também pelos professores. Visualizar um sólido geométrico como figura em uma folha de papel pode ser bem complicado dependendo do formato deste sólido. Neste caso, o uso de material concreto torna-se muito útil, ao passo que facilita a visualização de figuras tridimensionais.

O ensino da Geometria através do lúdico, mais especificamente por meio de construções, vem sendo proposto em vários trabalhos. Em Chaves (CHAVES, 2013), por exemplo, são apresentadas diversas propostas metodológicas para a introdução da Geometria no ensino fundamental. Entre estas propostas, está a confecção de sólidos geométricos com canudos. O autor destaca a importância desta atividade:

A montagem de sólidos com o uso de canudos [...] além de possibilitar que o estudante monte estruturas e brinque com a geometria espacial, fica mais visível a percepção de vértices e arestas as quais na atividade com papel são menos notados. (CHAVES, 2013, p.32)

Com a construção de triângulos usando canudos é possível trabalhar a desigualdade triangular de forma lúdica. Em Correa (CORREA, 2013), uma das atividades propostas visa a compreensão das condições para a construção de um triângulo. O autor propõe também, atividades de construção de quadriláteros, onde apresenta as propriedades dos mesmos e conclui que a abordagem de conceitos e propriedades relativos à Geometria Plana, através da elaboração de polígonos com canudos, é satisfatória.

Pode-se compreender facilmente o Teorema de Euler através de atividades de construção de poliedros regulares com canudos. Isso foi constatado por Contijo (CONTIJO, 2014) ao propor e aplicar atividades inerentes a este tema. Chagas (CHAGAS, 2014) usou a construção de poliedros de canudos e película de sabão para explorar a dedução do Teorema de Euler e verificar as Leis de Plateau e as superfícies mínimas.

Desta forma, este trabalho apresenta atividades e o relato da aplicação das mesmas, onde usou-se Geometria Espacial para introduzir conceitos básicos da Geometria Plana. As dinâmicas contidas nesta dissertação consistem de quatro etapas: pesquisa na internet, construção de poliedros usando canudos e cordão, imersão dos mesmos em água e detergente e ainda, elaboração de um glossário dos termos utilizados durante as tarefas.

Estas atividades, visam despertar a curiosidade dos estudantes para a importância e beleza da Matemática como ciência, já que o uso do material concreto, especialmente a

película de sabão, pode ser um elemento instigante e motivador em todos os estágios da educação escolar.

Esta proposta de trabalho foi aplicada em uma turma do oitavo ano e duas turmas do sexto ano do ensino fundamental. No entanto, com algumas alterações e adaptações, podem ser aplicadas nos três níveis de ensino: fundamental, médio e superior.

Quando o assunto é Geometria, percebe-se ao consultar livros didáticos antigos do ensino fundamental, que pouco ou nada era abordado acerca de conceitos geométricos. No livro de sexta série (atual sétimo ano) de Sardella e Matta (SARDELLA; MATTA, 1984), a única referência feita à Geometria, é quando os autores utilizam triângulos para ensinar proporcionalidade. Desta mesma classe, também foram consultados o livro de Trotta (TROTTA, 1985) e de Bianchini (BIANCHINI, 1988). Nestes livros, é feito somente uma abordagem à Geometria: quando os autores apresentam rapidamente o conteúdo de ângulos no último capítulo dos mesmos.

Ainda hoje, sente-se a carência da falta da valorização dada ao ensino de Geometria. No ensino fundamental, por exemplo, só se percebe a importância deste campo da Matemática, quando no nono ano começa-se o estudo da trigonometria, e muitas vezes os alunos desconhecem até mesmo o conceito de triângulo retângulo.

No entanto, acredita-se que esta concepção em relação ao estudo da Geometria vem se modificando ao passo que o educador busca por ampliar seus conhecimentos através de programas de pós-graduação. Esta afirmação foi feita com base na quantidade de trabalhos com títulos contendo a palavra Geometria submetidos por mestrandos do curso Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT. Estes trabalhos somam mais de dez por cento do total de dissertações. Entre estes estão o de Chaves (CHAVES, 2013), já anteriormente mencionado e o de Lucas (LUCAS, 2016), que apresenta uma sequência didática que visa resgatar os conceitos geométricos percebidos em defasagem no oitavo ano. Outros tantos abordam ainda Geometria, sem referenciá-la no título, como por exemplo em Júnior (JÚNIOR, 2014) que propõe algumas técnicas de construções de poliedros para melhorar a abordagem à Geometria.

Concomitante com as questões práticas e a fim de intensificar o aprendizado, neste trabalho, constam três propostas de atividades abordando conceitos geométricos. A primeira atividade é um questionário sobre polígonos e poliedros junto a um roteiro de pesquisa, a segunda e a terceira, relacionam os poliedros construídos a conceitos geométricos básicos. Estas atividades encontram-se nos Apêndices A, B e C, respectivamente, em versão para impressão. No Apêndice D é possível imprimir um questionário de satisfação, que avalia como os alunos sentiram-se durante a realização de todas as atividades.

Além desta introdução, esta dissertação apresenta no capítulo 1 os objetivos gerais e específicos. No capítulo 2, tem-se a fundamentação matemática, ou seja, os conteúdos

trabalhados durante as atividades. O terceiro capítulo, trata como a Geometria vem sendo abordada pelos PCNs e nos livros didáticos, ressaltando ainda, a importância da Geometria e alguns aspectos relevantes no ensino de Matemática como o uso de material concreto para auxiliar na construção do conhecimento. Já no capítulo 4 tem-se a sondagem da aceitação desta atividade pelo alunos. Nos capítulos 5 e 6, encontram-se, respectivamente, as recomendações metodológicas e o relato da aplicação e a análise dos resultados. Finalmente, no capítulo 7 estão as conclusões deste trabalho, seguida dos Apêndices.

1 Objetivos

Neste capítulo estão descritos os objetivos deste trabalho. Na primeira seção encontram-se os objetivos mais gerais, enquanto que na segunda, estão listados os objetivos específicos relacionados aos conteúdos que serão trabalhados ao aplicar as atividades.

1.1 Objetivos gerais

De forma mais geral, pretende-se:

- propor atividades diferenciadas, utilizando material concreto para iniciar o estudo da Geometria;
- disponibilizar atividades que possam ser impressas e aplicadas em sala de aula;
- tornar as aulas de Matemática mais prazerosas e motivadoras tanto para alunos, quanto para professores;
- despertar a curiosidade dos alunos, com o intuito de facilitar o aprendizado de conceitos geométricos;
- incentivar os professores pela busca de metodologias diferentes das tradicionais;
- promover a socialização dos alunos através de trabalhos em grupos;
- analisar o impacto de cada atividade proposta no aprendizado de conceitos geométricos.

1.2 Objetivos específicos

Com a aplicação destas atividades espera-se que os alunos consigam se apropriar dos seguintes conceitos geométricos:

- relacionar os conceitos de vértices, arestas e faces aos conceitos primitivos de ponto, reta e plano;
- compreender o conceito de ângulo;
- reconhecer os tipos de polígonos que formam as faces dos poliedros;
- aprender sobre os elementos de um polígono;

-
- conhecer os tipos de poliedros e saber diferenciá-los;
 - entender os principais elementos de um poliedro;
 - verificar a rigidez e não rigidez dos poliedros e a aplicação destas propriedades à problemas reais, por exemplo, na construção civil.

No próximo capítulo serão apresentados os principais conteúdos da Geometria trabalhados durante a aplicação das atividades.

2 Geometria Euclidiana Plana e Espacial

Neste capítulo serão apresentados os principais conceitos da Geometria Euclidiana Plana e Espacial pertinentes às atividades contidas neste trabalho.

Segundo Neto (NETO, 2013), a Geometria Euclidiana Plana estuda as propriedades relativas aos pontos e retas em um plano. Já a Geometria Euclidiana Espacial estuda as propriedades relativas a pontos, retas e planos no espaço tridimensional.

2.1 Noções primitivas

Nesta seção serão apresentadas as primeiras noções geométricas, também chamadas de noções primitivas. Segundo Dolce e Pompeo (DOLCE; POMPEO, 1995) estes conceitos primitivos são adotados sem definição.

2.1.1 Ponto

A ideia do que vem a ser um ponto parte de um conhecimento intuitivo adquirido no dia a dia através de experiências e observações. São muitos os autores, entre eles Neto (NETO, 2013) e Dolce e Pompeo (DOLCE; POMPEO, 1995), que assumem o conceito de ponto como um conceito primitivo. Os conceitos primitivos da geometria são noções adotadas sem definições formais. Um ponto pode ser obtido tocando a folha de papel com uma caneta ou lápis.



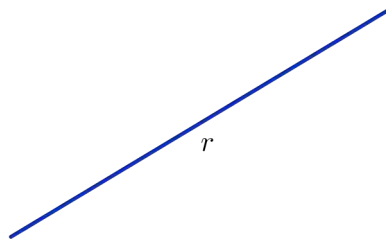
Figura 1 – O ponto A

Em geral, os pontos são denotados por letras latinas maiúsculas (Figura 1).

2.1.2 Reta

O conceito de reta também é considerado um conceito primitivo, que dispensa definições formais. Considera-se reta como o conjunto de dois ou mais pontos.

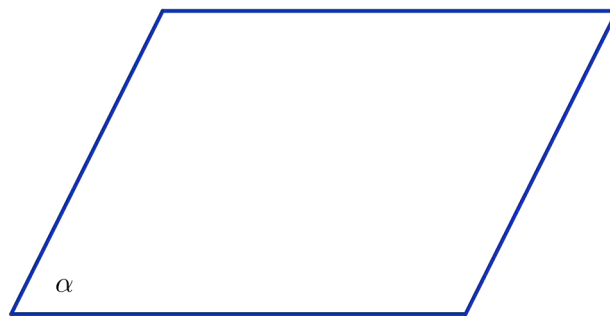
As retas são designadas por letras latinas minúsculas. Veja uma representação na Figura 2.

Figura 2 – A reta r

2.1.3 Plano

Outro conceito primitivo é o conceito de plano. Pode-se assumir que o plano contém todos os pontos, com pelo menos três deles não situados em uma mesma reta.

Os planos são denotados por letras gregas minúsculas (Figura 3).

Figura 3 – O plano α

2.2 Proposições e definições primitivas

Os postulados e definições apresentados nesta seção são proposições primitivas. Em geral, segundo os autores Dolce e Pompeo (DOLCE; POMPEO, 2006), (DOLCE; POMPEO, 1995), as proposições ou propriedades geométricas necessitam de demonstrações para serem aceitas como verdadeiras. No entanto, algumas delas, por se tratarem de proposições primitivas serão enunciadas sem demonstração. Segundo Neto (NETO, 2013), estas afirmações sem demonstração são denominadas axiomas.

Postulado 1. Postulado da existência de uma reta:

Em uma reta, bem como fora dela, há infinitos pontos (DOLCE; POMPEO, 1995).

A Figura 4 representa uma reta r e os pontos A, B, C, D, E e F , sendo que:

- 1) Os pontos B, C e E estão em r , ou a reta r passa por B, C e E .
- 2) Os pontos A, D e F não estão em r ou a reta r não passa por A, D e F .

Podemos ainda escrever da seguinte forma: $B \in r, C \in r, E \in r, A \notin r, D \notin r, F \notin r$.

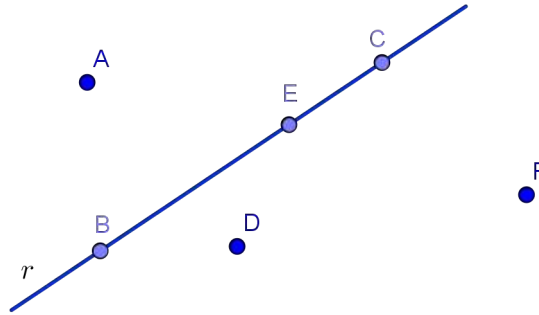


Figura 4 – A reta r

Os pontos B, C e E da Figura 4 são pontos **colineares**, pois pertencem a uma mesma reta. Já os pontos A, B e C não são colineares.

Postulado 2. Postulado da existência de um plano:

Existe plano e num plano, bem como fora dele, há infinitos pontos (DOLCE; POMPEO, 2006).

Na Figura 5 tem-se um plano α e os pontos A, B, C, D, E, F e G , sendo que os pontos A, B, D e G estão em α e os pontos C, E e F não estão em α .

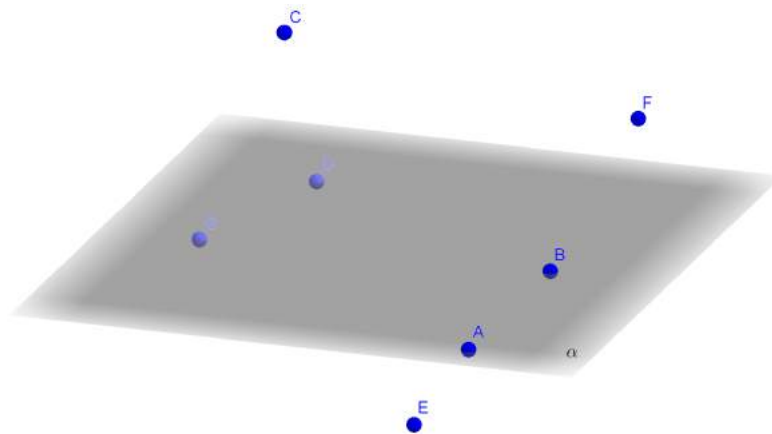


Figura 5 – Pontos pertencentes ao plano α e pontos não pertencentes ao plano α

Podemos ainda escrever da seguinte forma: $A \in \alpha, B \in \alpha, D \in \alpha, G \in \alpha, C \notin \alpha, E \notin \alpha, F \notin \alpha$.

Postulado 3. Postulado da determinação de uma reta:

Dois pontos distintos determinam uma única reta que passa por eles (DOLCE; POMPEO, 2006).

Os pontos distintos A e B determinam a reta indicada por \overleftrightarrow{AB} (Figura 6).

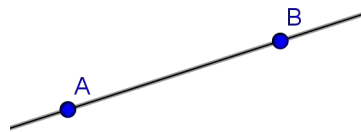


Figura 6 – A reta \overleftrightarrow{AB} .

Duas ou mais retas **coincidentes** são equivalentes a uma única reta.

Postulado 4. Postulado da determinação de um plano:

Três pontos não colineares determinam um único plano que passa por eles (DOLCE; POMPEO, 2006).

Os pontos não colineares A, B e C determinam o plano α que é único (Figura 7).

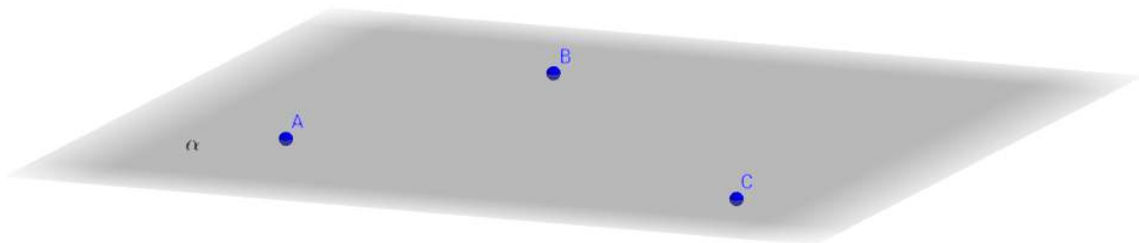


Figura 7 – O plano $\alpha = (A, B, C)$

Postulado 5. Postulado da inclusão:

Se uma reta tem dois pontos distintos num plano, então ela está contida no plano (DOLCE; POMPEO, 1995).

Os pontos A e B na Figura 8 são pontos **coplanares**, pois pertencem a um mesmo plano.

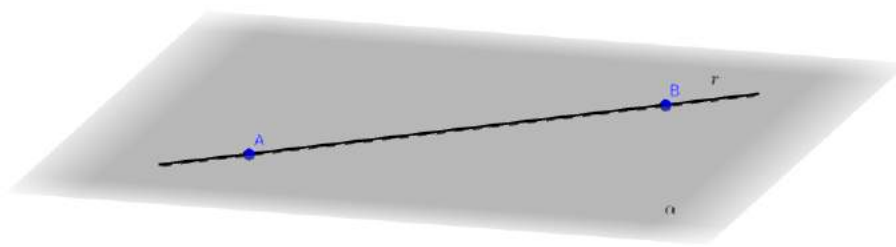


Figura 8 – Reta $r = \overleftrightarrow{AB}$ contida no plano α

Definição 2.2.1. Retas concorrentes.

Duas retas são concorrentes se, e somente se, elas têm um único ponto em comum (DOLCE; POMPEO, 1995).

Veja que $f \cap g = \{P\}$ (Figura 9).

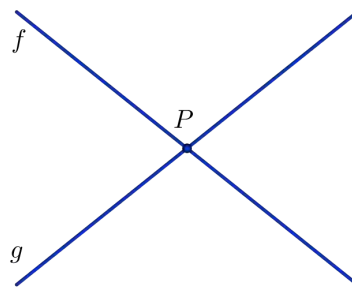


Figura 9 – Retas concorrentes

Definição 2.2.2. Retas paralelas.

Duas retas são paralelas se, e somente se, ou são coincidentes ou são coplanares e não tem ponto em comum (DOLCE; POMPEO, 2006).

Note que, se $r \subset \alpha, s \subset \alpha$, e $r \cap s = \emptyset \Rightarrow r // s$ (Figura 10).

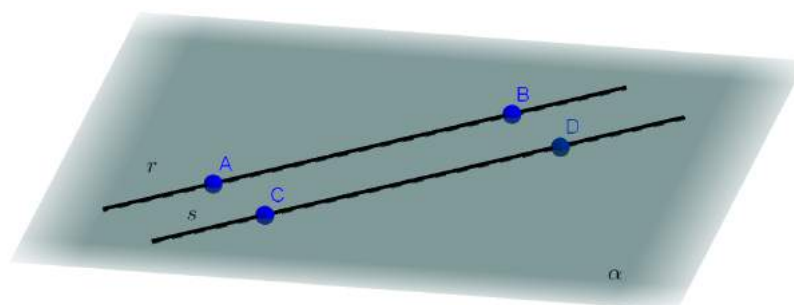


Figura 10 – Retas paralelas

Definição 2.2.3. Segmento de reta.

Dados dois pontos distintos, a reunião do conjunto que contém esses dois pontos com o conjunto dos pontos que estão entre eles é um segmento de reta (DOLCE; POMPEO, 1995).

Sejam A e B dois pontos distintos sobre uma reta r , o segmento AB é a porção da reta r situada de A a B (Figura 11).

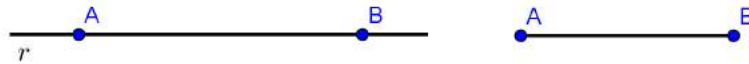


Figura 11 – Segmento de reta AB

Se os pontos A e B forem coincidentes, pode-se afirmar que o segmento AB é o **segmento nulo**.

Para denotar o comprimento do segmento AB , escreve-se \overline{AB} .

Quando dois ou mais segmentos apresentam a mesma medida, são chamados de **segmentos congruentes**.

Definição 2.2.4. Semirreta.

Dados dois pontos distintos A e B , a reunião do segmento de reta AB com o conjunto dos pontos X tais que B está entre A e X é a semirreta \overrightarrow{AB} (DOLCE; POMPEO, 1995).

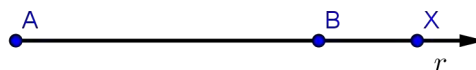


Figura 12 – Semirreta \overrightarrow{AB}

O ponto A é a origem da semirreta \overrightarrow{AB} (Figura 12).

2.3 Interseção de planos

Postulado 6. Postulado da interseção:

Se dois planos distintos têm um ponto comum, então eles têm pelo menos um outro ponto comum (DOLCE; POMPEO, 2006), isto é,

$$\alpha \neq \beta, P \in \alpha \text{ e } P \in \beta \Rightarrow \exists Q \mid Q \neq P, Q \in \alpha \text{ e } Q \in \beta.$$

Proposição 2.3.1. A interseção de dois planos distintos e concorrentes é uma reta (NETO, 2013).

Demonstração. Sejam α e β dois planos distintos e concorrentes, e $A, B \in \alpha \cap \beta$. Então tem-se $\overleftrightarrow{AB} \subset \alpha, \beta$. Por outro lado, se existe um ponto $C \in \alpha \cap \beta$ e tal que $C \notin \overleftrightarrow{AB}$, então teríamos $\alpha = (C, \overleftrightarrow{AB}) = \beta$, o que é uma contradição. Logo, $\alpha \cap \beta = \overleftrightarrow{AB}$ (Figura 13).

□

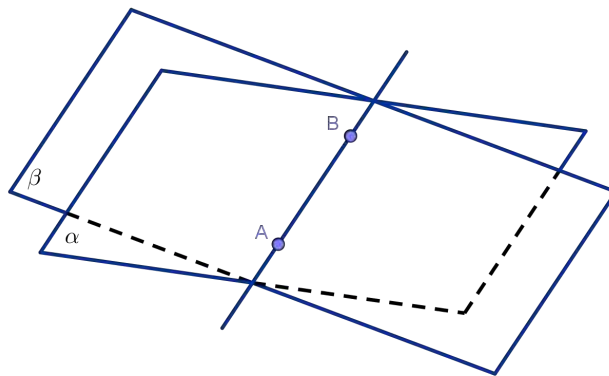


Figura 13 – Interseção de dois planos $\alpha \cap \beta = \overleftrightarrow{AB}$.

Segundo Neto (NETO, 2013) e Dolce e Pompeo (DOLCE; POMPEO, 2006), com a interseção de três planos distintos do espaço, sendo dois a dois secantes, obtém-se uma reta ou três retas paralelas ou um ponto.

Proposição 2.3.2. Dados três planos distintos α , β , e γ , dois a dois secantes, uma das situações abaixo ocorre:

- (a) α , β , e γ contém uma mesma reta;
- (b) α , β , e γ são dois a dois concorrentes e as retas de interseção concorrem em um único ponto;
- (c) α , β , e γ são dois a dois concorrentes e as retas de interseção são duas a duas paralelas.

Demonstração. Suponha que dois quaisquer dos planos α , β , e γ se intersectam, digamos $\alpha \cap \beta = r$, $\beta \cap \gamma = s$, $\alpha \cap \gamma = t$, há três possibilidades:

- (a) Se $r = s$, então r é comum a α , β , e γ , de sorte que $r = t$. Analogamente, supondo $r = t$, ou $s = t$, concluímos que $r = s = t$ e os planos passam por uma mesma reta (Figura 14).

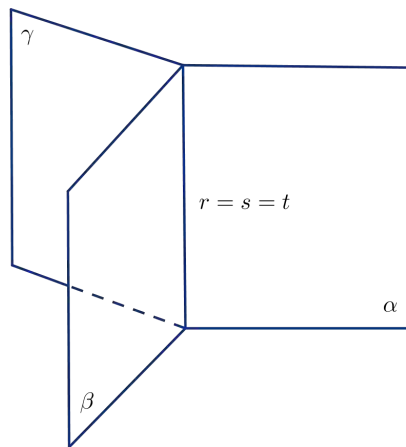


Figura 14 – Interseção de três planos - uma única reta

(b) Sejam r, s e t duas a duas distintas. Se $r \cap s \neq \emptyset$, digamos $r \cap s = \{A\}$, então $A \in r$ implica em $A \in \alpha \cap \beta$ e $A \in s$ implica em $A \in \beta \cap \gamma$. Portanto, $A \in \alpha \cap \gamma$, isto é, $A \in t$, de sorte que r, s e t passam por um mesmo ponto. Analogamente, supondo $r \cap t \neq \emptyset$ ou $s \cap t \neq \emptyset$, concluímos que $r \cap s \cap t \neq \emptyset$ (Figura 15).

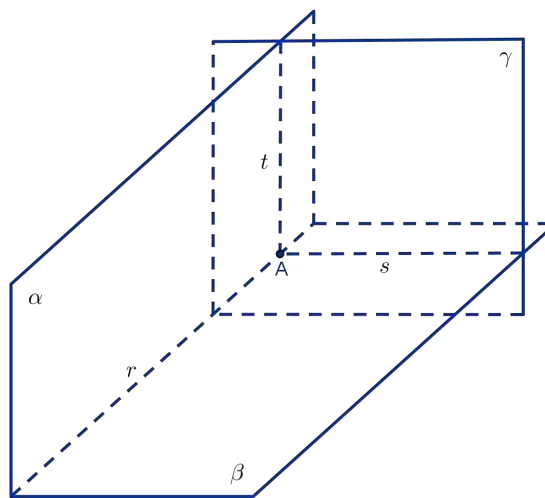


Figura 15 – Interseção de três planos - um ponto

(c) Se r, s e t são duas a duas distintas, mas $r \parallel s$. Então $r \parallel t$ também, pois, caso fosse $r \cap t \neq \emptyset$, teríamos, pelo item anterior, $r \cap s \cap t \neq \emptyset$, o que seria um absurdo. Analogamente, $s \parallel t$ (Figura 16).

□

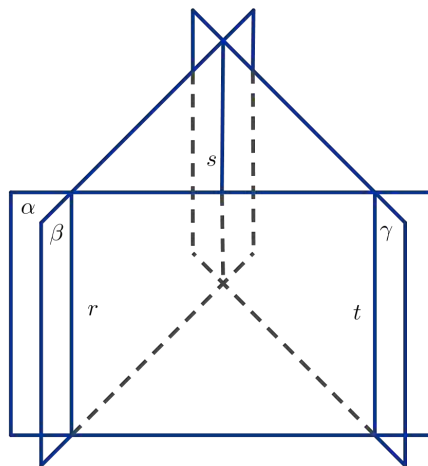


Figura 16 – Interseção de três planos - três retas paralelas

2.4 Ângulos

O estudo de ângulos inicia-se pela definição de região convexa e não convexa. Em seguida será apresentada a definição de semiplano. Estas definições são úteis quando a definição de ângulo ou região angular for estudada.

2.4.1 Definições

Definição 2.4.1. Região convexa e não convexa.

Uma região \mathfrak{R} do plano é convexa quando, para todos os pontos $A, B \in \mathfrak{R}$ tivermos $AB \subset \mathfrak{R}$. Caso contrário, dizemos que \mathfrak{R} é uma região não convexa (NETO, 2013)(Figura 17).

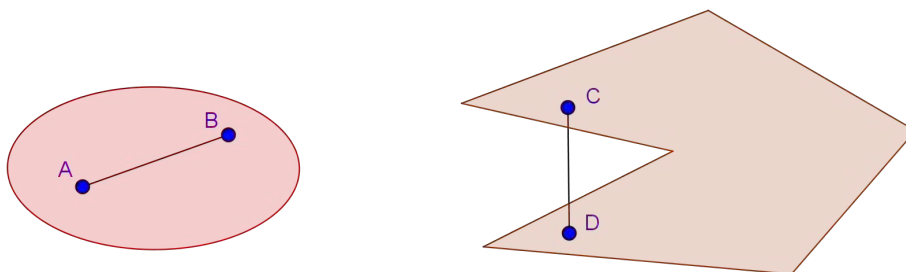


Figura 17 – Região convexa (esq.) e região não convexa (dir.)

Observação: Uma reta é um conjunto convexo de pontos, pois se A e B são dois

pontos distintos de r , o segmento \overline{AB} está contido em r (Figura 18).

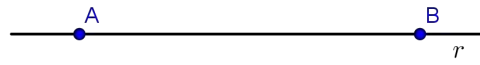


Figura 18 – Reta: um exemplo de conjunto convexo de pontos

Definição 2.4.2. Semiplano.

Conjuntos de pontos ou regiões convexas delimitadas por uma reta r (NETO, 2013).

Na Figura 19 tem-se os pontos A e B em um plano dividido por uma reta r . Se A pertence a um dos semiplanos e B pertence ao outro, tem-se sempre $AB \cap r \neq \emptyset$.

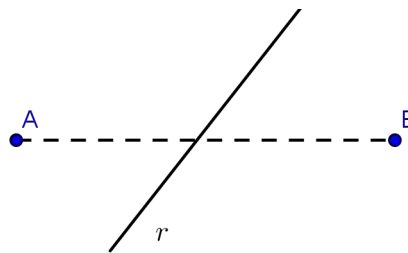


Figura 19 – Semiplanos determinados por uma reta

Definição 2.4.3. Ângulo ou região angular.

Dadas, no plano, duas semirretas \overrightarrow{OA} e \overrightarrow{OB} , chama-se **ângulo** (ou **região angular**) de vértice O e lados \overrightarrow{OA} e \overrightarrow{OB} uma das duas regiões do plano limitadas pelas semirretas \overrightarrow{OA} e \overrightarrow{OB} (NETO, 2013).

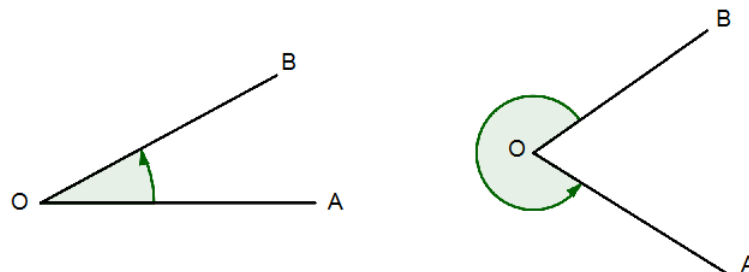


Figura 20 – Regiões angulares no plano

Na Figura 20 tem-se à esquerda um ângulo convexo e à direita um ângulo não convexo. Para denotar um ângulo de lados \overrightarrow{OA} e \overrightarrow{OB} escreve-se $\angle AOB$.

Definição 2.4.4. Ângulos consecutivos.

Dois ângulos são consecutivos se, e somente se, um lado de um deles é também lado do outro, ou seja, um lado de um deles coincide com um lado do outro (DOLCE; POMPEO, 1995).

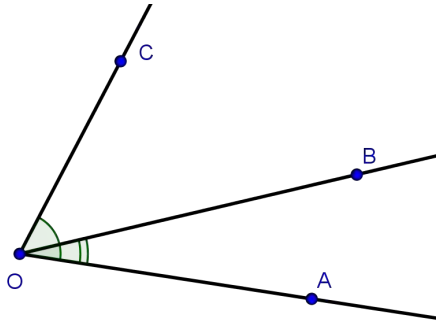


Figura 21 – Ângulos consecutivos

Na Figura 21 note que \overrightarrow{OA} é lado comum dos ângulos $\angle AOB$ e $\angle AOC$.

Definição 2.4.5. Ângulos adjacentes.

Dois ângulos consecutivos são adjacentes se, e somente se, não têm pontos internos comuns (DOLCE; POMPEO, 1995).

Os ângulos da Figura 22 são ângulos adjacentes.

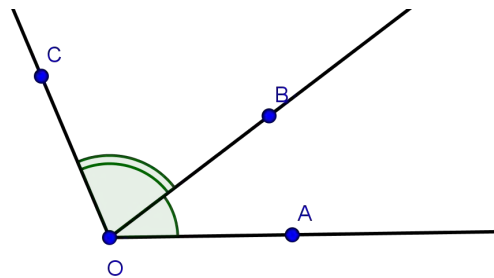


Figura 22 – Ângulos adjacentes

Definição 2.4.6. Ângulos opostos pelo vértice.

Dois ângulos $\angle AOB$ e $\angle COD$, são opostos pelo vértice (abrevia-se **OPV**) se seus lados forem semirretas opostas (NETO, 2013).

Note que duas retas concorrentes determinam dois pares de ângulos opostos pelo vértice. Os ângulos $\angle AOB$ e $\angle COD$ da Figura 23 são opostos pelo vértice, assim como os ângulos $\angle AOD$ e $\angle COB$ da mesma figura também são opostos pelo vértice.

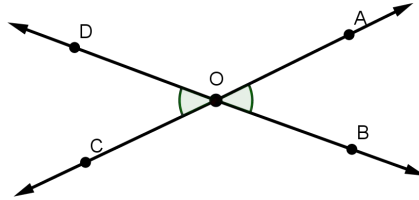


Figura 23 – Ângulos opostos pelo vértice

2.4.2 Ângulos congruentes

A congruência entre ângulos é uma noção primitiva (DOLCE; POMPEO, 1995). Ângulos congruentes são aqueles que coincidem por superposição (BEZERRA; SCHWARZ; BEZERRA, 1982). Para denotar congruência usa-se o símbolo \equiv . Por exemplo, na Figura 23 $\angle BOA \equiv \angle COD$ e $\angle COB \equiv \angle AOD$.

2.4.3 Bissetriz

Definição 2.4.7. Bissetriz de um ângulo.

Uma semirreta \overrightarrow{OC} interna a um ângulo $\angle AOB$, é bissetriz do ângulo $\angle AOB$ se, e somente se, $\angle AOC \equiv \angle BOC$ (DOLCE; POMPEO, 1995).

A bissetriz de um ângulo é uma semirreta interna ao ângulo, que o divide em dois ângulos congruentes. A origem da bissetriz coincide com o vértice do ângulo.

É comum assinalar os ângulos congruentes com igual número de traços (Figura 24).

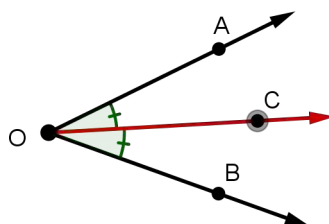


Figura 24 – Bissetriz de um ângulo

2.4.4 Características e medidas de um ângulo

2.4.4.1 Suplemento adjacente

Dado o ângulo $\angle AOB$, a semirreta \overrightarrow{OC} oposta à semirreta \overrightarrow{OA} determina junto com a semirreta \overrightarrow{OB} um ângulo $\angle BOC$ chamado de **ângulo suplementar adjacente** ou **suplemento adjacente de $\angle AOB$** (DOLCE; POMPEO, 1995) (Figura 25).

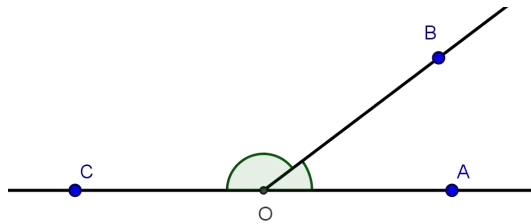


Figura 25 – Ângulo suplementar adjacente

2.4.4.2 Ângulo reto, agudo e obtuso

Ângulo reto é todo ângulo congruente a seu suplementar adjacente (DOLCE; POMPEO, 1995). Também obtêm-se ângulos retos quando duas retas concorrentes formam quatro ângulos congruentes (BEZERRA; SCHWARZ; BEZERRA, 1982).

Um ângulo menor que um ângulo reto é um **ângulo agudo** (DOLCE; POMPEO, 1995).

Porém, se o ângulo for maior que o ângulo reto este ângulo recebe o nome de **ângulo obtuso** (DOLCE; POMPEO, 1995).

Na Figura 26 representam-se os ângulos reto, agudo e obtuso, respectivamente.

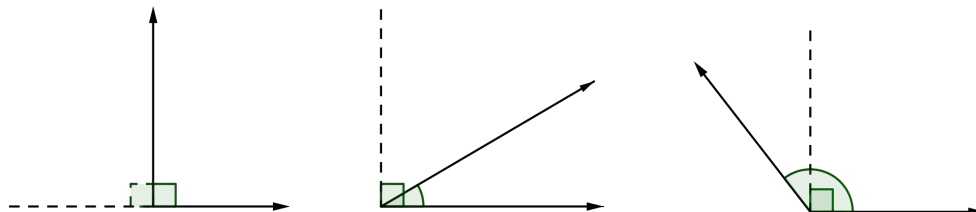


Figura 26 – Ângulo reto, agudo e obtuso

2.4.4.3 Medida de um ângulo

A medida de um ângulo, também chamada de amplitude, é um número real positivo associado ao tamanho da região do plano que ele ocupa.

Em geral, associa-se um número a um ângulo estabelecendo a razão entre este ângulo e outro ângulo tomado como unidade.

Na prática, obtém-se um ângulo de um grau, denotado por 1° , dividindo o ângulo reto em 90 arcos iguais e tomando um desses 90 arcos.

A maneira de denotar medida de ângulo, pode variar de um livro para outro. Neto (NETO, 2013) utiliza a simbologia $A\hat{O}B$ ou letras gregas minúsculas quando se refere ao tamanho de um ângulo $\angle AOB$. Já Dolce e Pompeo (DOLCE; POMPEO, 1995) usam a indicação $m\hat{A}OB$ quando refere-se a medida do $\angle AOB$. Em (BEZERRA; SCHWARZ; BEZERRA, 1982) encontram-se medidas de ângulos denotados por letras latinas minúsculas.

2.4.4.4 Ângulos complementares, suplementares e replementares

As definições contidas nesta subseção foram escritas com base nas definições apresentadas por (DOLCE; POMPEO, 1995) e (BEZERRA; SCHWARZ; BEZERRA, 1982).

Um ângulo é complemento de outro se, e somente se, a soma de suas medidas é 90° . Estes ângulos são chamados de **complementares**.

Dois ângulos são ditos **suplementares** se, e somente se, a soma de suas medidas for 180° . Um deles é suplemento do outro.

Dois ângulos são **replementares** quando a soma de suas medidas é igual a 360° .

2.4.4.5 Ângulo nulo e ângulo raso

As definições seguintes foram elaboradas a partir das apresentadas por (DOLCE; POMPEO, 1995).

O **ângulo nulo** é o ângulo cujos lados são coincidentes.

Ângulo raso é o ângulo que possui como lados semirretas opostas.

2.5 Triângulos

Definição 2.5.1. Dados três pontos não colineares A , B e C , chama-se **triângulo** ABC à reunião dos segmentos AB , AC e BC (DOLCE; POMPEO, 1995) (Figura 27).

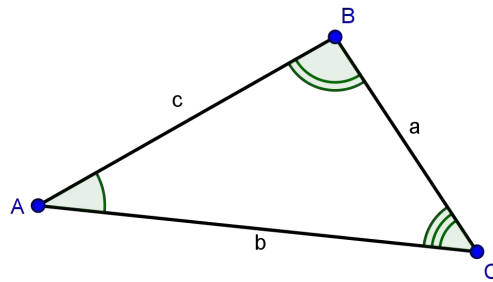


Figura 27 – Triângulo ABC

O interior de um triângulo, ou seja, a região delimitada pelos segmentos que o determinam chama-se **região triangular**.

A reunião de um triângulo com sua região triangular forma uma **superfície triangular**.

2.5.1 Elementos de um triângulo

No triângulo da Figura 27, pode-se observar que:

- Os pontos A , B e C são os **vértices** do triângulo ABC .
- Os **lados** do triângulo ABC são os segmentos de medidas $\overline{AB} = c$, $\overline{AC} = b$ e $\overline{BC} = a$. Usam-se comumente letras minúsculas correspondentes aos vértices opostos para representar a medida dos lados de um triângulo.
- Os **ângulos internos** são também elementos principais de um triângulo. Na Figura 27 têm-se os seguintes ângulos: $\angle BAC$, $\angle ABC$ e $\angle ACB$. Usualmente, abrevia-se a notação de ângulos de um triângulo, utilizando a letra correspondente ao vértice, ou seja, $\angle A$, $\angle B$ e $\angle C$. Já as medidas dos ângulos internos são denotadas por $\hat{A} = \hat{BAC}$, $\hat{A} = \hat{ABC}$ e $\hat{C} = \hat{ACB}$.

2.5.2 Classificação dos triângulos

Os triângulos classificam-se de duas maneiras: quanto ao comprimento de seus lados ou em relação às medidas de seus ângulos.

Quanto aos lados, os triângulos são denominados (Figura 28):

- **equiláteros** quando seus três lados forem congruentes;
- **isósceles** quando tiver dois de seus lados congruentes;

- **escaleno** quando os três lados tiverem medidas diferentes.

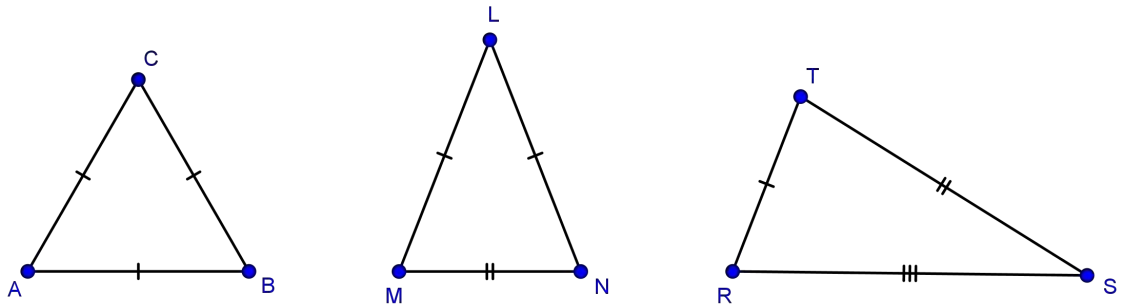


Figura 28 – Triângulo equilátero, isóceles e escaleno

Em relação às medidas dos ângulos dos triângulos, os mesmos classificam-se em:

- **retângulo**: quando o triângulo possuir um ângulo reto;
- **acutângulo**: quando seus três ângulos forem agudos;
- **obtusângulo**: quando um dos ângulos for obtuso.

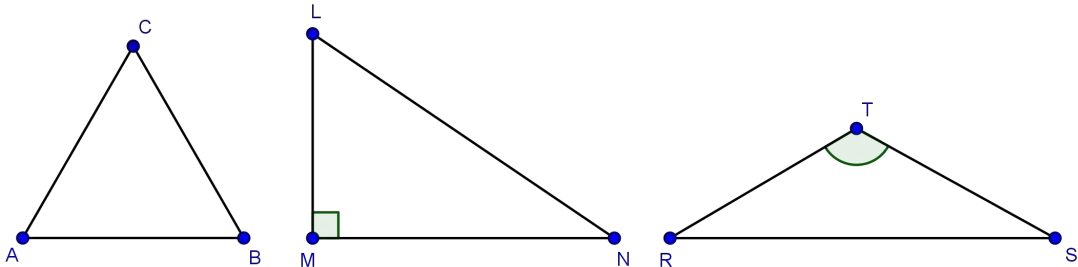


Figura 29 – Triângulos acutângulo (esq.), retângulo (centro) e obtusângulo (dir.)

Na Figura 29 o segmento LN do triângulo retângulo recebe o nome de **hipotenusa** por ser o lado oposto ao ângulo reto. Os outros dois lados são chamados de **catetos**.

2.6 Polígonos

Definição 2.6.1. Sejam $n \geq 3$ um número natural e uma sequência de pontos distintos (A_1, A_2, \dots, A_n) do plano, onde três pontos consecutivos não são colineares, chama-se **polígono convexo** $A_1A_2A_3\dots A_{n-1}A_n$ a reunião dos segmentos $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{n-1}A_n, A_nA_1$ (DOLCE; POMPEO, 1995).

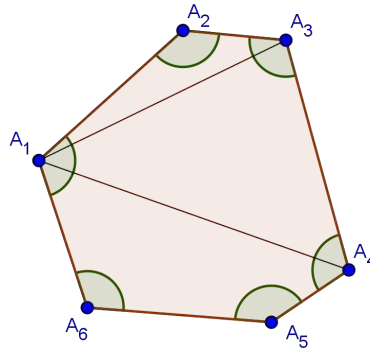


Figura 30 – Polígono convexo de seis vértices

2.6.1 Elementos de um polígono

Na Figura 30 podem-se destacar os seguintes elementos do polígono $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$.

- Os pontos A_1, A_2, \dots, A_6 são os **vértices** do polígono;
- Os segmentos $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_6A_1$ são os **lados** do polígono, ou ainda, seus comprimentos;
- Os ângulos $\widehat{A}_1 = A_6\widehat{A}_1A_2, \widehat{A}_2 = A_1\widehat{A}_2A_3, \dots, \widehat{A}_6 = A_5\widehat{A}_6A_1$ são os **ângulos** do polígono;
- A região limitada do plano, delimitada pelo segmentos $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_6A_1$ denomina-se **região poligonal** ou **superfície poligonal**;
- A soma dos comprimentos dos lados do polígono é o **perímetro** do mesmo;
- Um polígono possui o mesmo número de vértices, lados e ângulos internos;
- Qualquer um dos segmentos formados pelos vértices de um polígono, que não seja um lado do mesmo, denomina-se **diagonal**. Na Figura 30 os segmentos A_1A_3 e A_1A_4 são duas das diagonais do polígono.

Proposição 2.6.1. Todo n -ágono convexo possui exatamente $\frac{n(n-3)}{2}$ diagonais (NETO, 2013).

Demonstração. Para $n = 3$ não há o que provar, já que triângulos não possuem diagonais. Supondo, então, $n \geq 4$. Unindo um dos vértices do polígono aos demais vértices obtém-se $(n - 1)$ segmentos, porém dois deles são lados do polígono, logo restam $(n - 3)$ diagonais partindo de um dos vértices. Analogamente, este raciocínio é válido para os n vértices

do polígono. Daí temos $n(n - 3)$ diagonais. No entanto, cada diagonal é contada duas vezes, já que tem extremidade em dois vértices. Portanto, para obter o número correto de diagonais, deve-se dividir o total $n(n - 3)$ por 2, obtendo, assim, $\frac{n(n-3)}{2}$.

□

2.6.2 Classificação dos polígonos

Alguns polígonos recebem nomes especiais de acordo com o número n de lados que possuem (Tabela 1).

Tabela 1 – Nomes especiais dados aos polígonos quanto ao número n de lados

n	NOME
3	triângulo ou trilátero
4	quadrângulo ou quadrilátero
5	pentágono
6	hexágono
7	heptágono
8	octógono
9	eneágono
10	decágono
11	undecágono
12	dodecágono
15	pentadecágono
20	icoságono

Os demais polígonos são identificados diretamente pelo número de lados que possuem, por exemplo, polígono de treze lados.

Outro aspecto que diferencia os polígonos e os classifica em convexo e côncavo (ou não convexo) é o que acontece com a posição dos vértices de um polígono e a reta determinada por dois vértices consecutivos, conforme pode-se observar na Figura 31.

Um polígono é **convexo** se, e somente se, a reta determinada por dois vértices consecutivos quaisquer deixa todos os demais vértices num mesmo semiplano dos dois que ela determina.

Um polígono é **côncavo** se ele não for convexo.

Quando um polígono possui os lados congruentes é dito **equilátero**. No entanto, se possuir os ângulos congruentes, é chamado de **equiângulo**.

Um polígono convexo será **polígono regular** se, e somente se, for equilátero (lados congruentes) e equiângulo (ângulos congruentes).

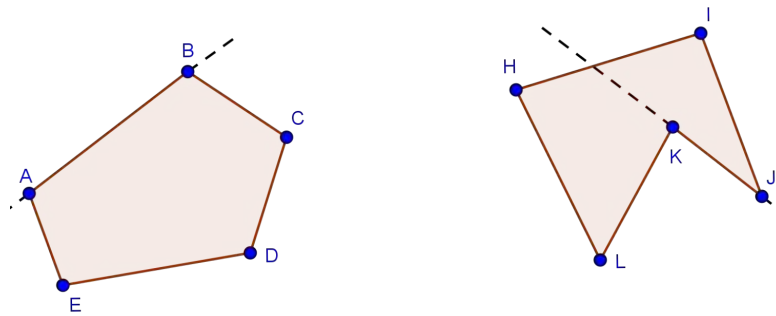


Figura 31 – Polígono convexo (esq.) e polígono côncavo (dir.)

Na Figura 32 tem-se um exemplo de polígono com lados congruentes, outro com ângulos congruentes e um terceiro com lados e ângulos congruentes.

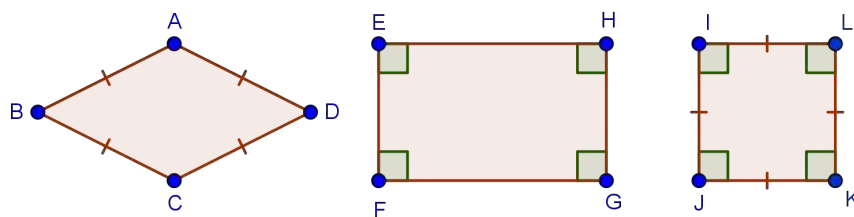


Figura 32 – Quadrilátero equilátero (esq.), quadrilátero equiângulo (centro), quadrilátero regular (dir.)

2.7 Poliedros convexos

As definições e propriedades dos poliedros contidas nesta seção foram escritas com base nas definições e propriedades apresentadas por (NETO, 2013) e (DOLCE; POMPEO, 2006).

Definição 2.7.1. A reunião de um número finito de polígonos planos, forma um conjunto fechado e limitado do espaço, de interior não vazio, chamado **poliedro convexo**, se obedecer as seguintes condições:

- 1) Dois polígonos quaisquer não estão no mesmo plano.
- 2) Cada lado de um polígono é comum a somente outro polígono.
- 3) O plano que contém cada polígono determina dois semiespaços. Todos os demais polígonos devem estar em um mesmo semiespaço (condição para poliedro convexo).
- 4) A interseção de dois polígonos ou é um lado ou é um ponto comum aos dois.

Na Figura 33, tem-se um exemplo de poliedro convexo e outro de poliedro não convexo.

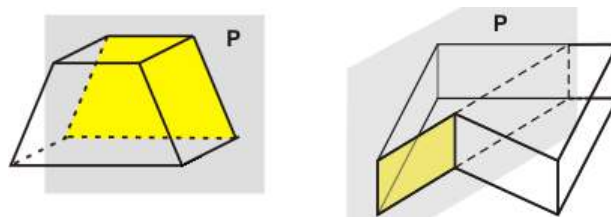


Figura 33 – Poliedro convexo (esq.) e poliedro não convexo (dir.)

Fonte: www.objetoseducacionais2.mec.gov.br

2.7.1 Elementos de um poliedro

A reunião dos polígonos que formam o poliedro é chamada de **fronteira** ou **superfície** do poliedro. Os polígonos que compõem a superfície do poliedro são chamados de **faces**. Os lados das faces são as **arestas** e os vértices dos polígonos são também **vértices** do poliedro.

2.7.2 Classificação dos poliedros

Já vimos que os poliedros podem ser convexos e não convexos. Nesta subseção, serão apresentadas outras classificações atribuídas aos poliedros convexos. Serão estudadas algumas características dos poliedros eulerianos, poliedros de Platão, poliedros regulares, assim como prismas e pirâmides.

2.7.2.1 Relação de Euler e poliedros eulerianos

Teorema 2.7.1 (Teorema de Euler). Para todo poliedro convexo, é válida a relação $V - A + F = 2$, onde V é o número de vértices, A é o número de arestas e F é o número de faces do poliedro (DOLCE; POMPEO, 2006).

Demonstração. Seja a superfície de um poliedro convexo qualquer com V vértices, A arestas e F faces. Retirando uma das faces obtém-se uma superfície aberta com V' vértices, A' arestas e F' faces. Para esta superfície vale a relação $V' - A' + F' = 1$.

Como $V' = V$, $A' = A$ e $F' = F - 1$, tem-se que $V - A + (F - 1) = 1$, logo

$$\boxed{V - A + F = 2}.$$

□

Os **poliedros eulerianos** são aqueles em que a relação de Euler é verificada. Segundo Dolce e Pompeo (DOLCE; POMPEO, 2006), todo poliedro convexo é euleriano, mas nem todo poliedro euleriano é convexo

Na Figura 34 tem-se dois poliedros, um convexo e outro não convexo. O poliedro convexo possui quatro vértices, seis arestas e quatro faces, enquanto o poliedro não convexo possui doze vértices, dezoito arestas e oito faces. Repare que a relação de Euler pode ser verificada em ambos.

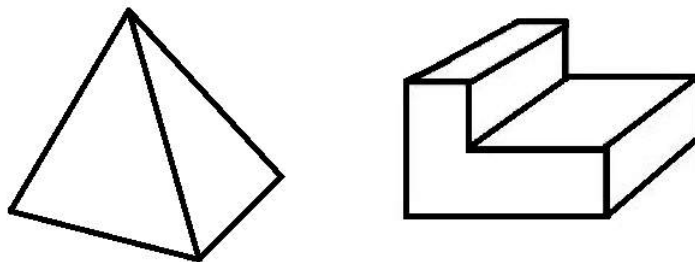


Figura 34 – Poliedros eulerianos: convexo (direita) e não convexo (esquerda)

2.7.2.2 Poliedros de Platão

Definição 2.7.2. Um poliedro é dito **poliedro de Platão** quando possui as três características a seguir:

- i) faces com mesmo número de arestas;
- ii) em todos os vértices incidir o mesmo número de arestas;
- iii) vale a Relação de Euler ($V - A + F = 2$).

Somente cinco poliedros satisfazem as três condições acima descritas. Na Tabela 2 estão as principais características dos poliedros de Platão.

Tabela 2 – Características dos poliedros de Platão

Poliedro	Vértices	Arestas	Faces	Formato das faces	Arestas nos vértices
tetraedro	4	6	4	triangulares	3 arestas
hexaedro	8	12	6	quadrangulares	3 arestas
octaedro	6	12	8	triangulares	4 arestas
dodecaedro	20	30	12	pentagonais	3 arestas
icosaedro	12	30	20	triangulares	5 arestas

2.7.2.3 Poliedros regulares

Definição 2.7.3. Quando todas as faces de um poliedro convexo forem polígonos regulares e congruentes e em cada um de seus vértices incidir um mesmo número de arestas, este poliedro é dito **regular**.

Existem apenas cinco poliedros regulares que são os poliedros de Platão (Figura 35).

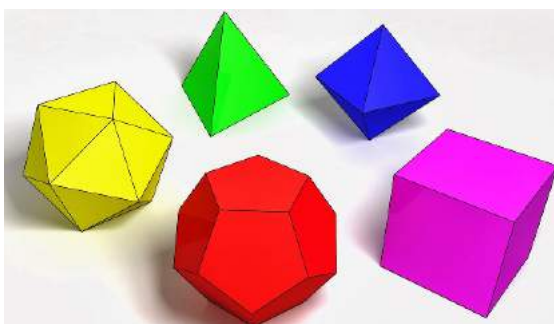


Figura 35 – Poliedros regulares

Fonte: www.profcard.com

2.7.2.4 Prismas

Definição 2.7.4. Considere um polígono $A_1A_2\dots A_n$ convexo situado num plano α e um segmento MN cuja reta suporte intersecta o plano α . A reunião de todos os segmentos congruentes e paralelos a MN com uma das extremidades nos pontos do polígono e situados no mesmo semiespaço dos determinados por α chama-se **prisma**.

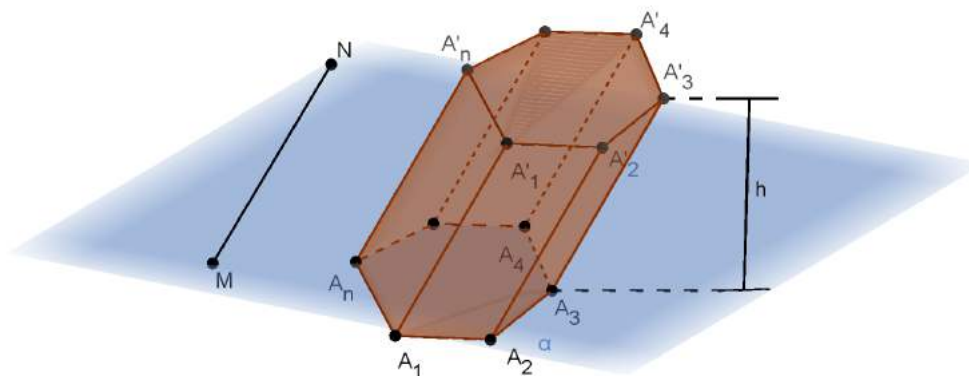


Figura 36 – Prisma

A Figura 36 mostra um prisma que possui os seguintes elementos:

- Os polígonos $A_1A_2\dots A_n$ e $A'_1A'_2\dots A'_n$ são as duas **bases** do prisma;
- os pontos $A_1, A_2, \dots, A_n, A'_1, A'_2, \dots, A'_n$ são os **vértices** do prisma;
- os segmentos $A_iA_{i+1}, A'_1A'_{i+1}$ e $A_iA'_i$ são as **arestas**, sendo que os segmentos $A_iA'_i$ para $1 \leq i \leq n$ são chamados de **arestas laterais**;
- os paralelogramos $A_iA_{i+1}A'_{i+1}A'_i$ são as faces laterais do prisma;
- o conjunto dos pontos do prisma que não pertencem a nenhuma das faces é chamado de **interior**;
- a distância h entre os planos que contêm as bases do prisma é a **altura**.

Os prismas podem ser retos, oblíquos ou regulares.

Num **prisma reto** as arestas laterais são perpendiculares às bases e as faces laterais são retângulos. Quando um prisma reto possui como bases polígonos regulares é chamado de **prisma regular**.

Já o prisma **oblíquo** é aquele cujas arestas laterais são oblíquas em relação aos planos das bases.

Os prismas são denotados por **prisma n-gonal** devido ao fato de suas bases serem polígonos de n lados. Por exemplo, um prisma cuja base é um pentágono, é chamado de **prisma pentagonal** ou se a base for um triângulo, **prisma triangular**.

Os prismas quadrangulares, cujas bases são paralelogramos, são chamados de **paralelepípedos**. Os paralelepípedos possuem 12 arestas agrupadas em três conjuntos de arestas iguais e paralelas.

Em relação às arestas e bases, os paralelepípedos classificam-se em:

- **Paralelepípedo reto**: quando as bases do prisma são paralelogramos e as faces laterais são retângulos.
- **Paralelepípedo reto-retângulo**: também chamado de **paralelepípedo retângulo** ou **ortoedro** é o prisma reto que possui como base e faces laterais seis retângulos.
- **Cubo**: é o paralelepípedo retângulo que possui todas as arestas congruentes.
- **Romboedro**: é um paralelepípedo que possui as doze arestas congruentes e suas faces laterais são seis losangos.

- **Romboedro reto:** é o paralelepípedo reto que possui as doze arestas congruentes entre si. As faces laterais são quadrados e as bases dois losangos.
- **Romboedro reto-retângulo:** é quando o romboedro reto possui faces e bases quadradas. O cubo é um romboedro reto-retângulo.

2.7.2.5 Pirâmides

Definição 2.7.5. Considere um polígono $A_1A_2\dots A_n$ convexo situado num plano α e um ponto V fora de α . Chama-se **pirâmide** à reunião dos segmentos com uma extremidade em V e outra nos pontos do polígono.

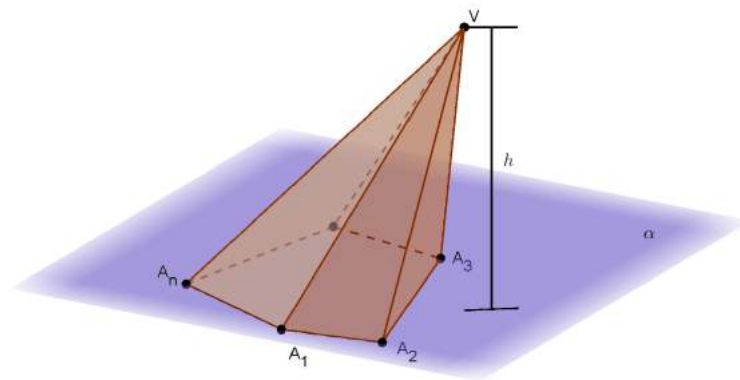


Figura 37 – Pirâmide

A pirâmide da Figura 37 possui os seguintes elementos:

- O polígono $A_1A_2\dots A_n$ é **base** da pirâmide;
- os pontos A_1, A_2, \dots, A_n e V são os **vértices**;
- os segmentos A_iA_{i+1} e VA_i para $1 \leq i \leq n$ são chamadas **arestas**;
- os triângulos VA_iA_{i+1} são as **faces laterais** da pirâmide;
- um ponto da pirâmide que não pertence a nenhuma das faces é chamado de **ponto interior**;
- a distância h entre o vértice V e o plano da base $A_1A_2\dots A_n$ é a **altura** da pirâmide.

Assim como os prismas, as pirâmides também são denotadas levando-se em conta o número de lados que compõem sua base por **pirâmide n -gonal**. Quando, por exemplo, a base da pirâmide for quadrada (polígono de $n = 4$ lados) tem-se uma pirâmide quadrangular.

Uma pirâmide é dita **regular** (Figura 38), quando sua base é um polígono regular e a projeção ortogonal do vértice V sobre o plano da base é o centro do polígono da base. Uma pirâmide regular possui arestas laterais congruentes e as faces laterais são triângulos isósceles congruentes.

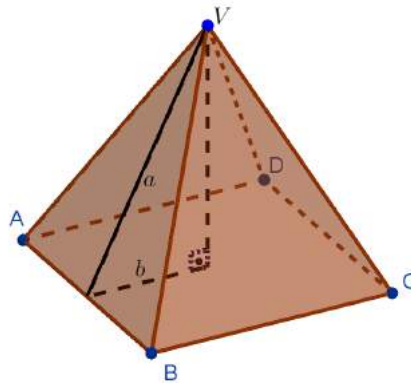


Figura 38 – Pirâmide regular

Na Figura 38 a altura a da face triangular em relação à base de uma pirâmide regular é chamada de **apótema**.

A base da pirâmide também possui apótema. Na Figura 38 chama-se **apótema da base** a distância b do ponto de interseção do apótema da pirâmide com a aresta da base ao centro do polígono da base.

Quando a pirâmide possui como base um triângulo é chamada de **tetraedro**. Um **tetraedro regular** é um prisma no qual as seis arestas que o compõem são congruentes entre si (Figura 39).

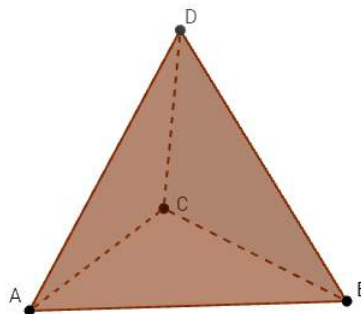


Figura 39 – Tetraedro regular

O capítulo seguinte apresenta os aspectos relativos às mudanças na maneira de ensinar e aprender matemática e como a Geometria deve ser abordada em sala de aula segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) e de acordo com os livros didáticos.

3 O ensino de Geometria

Este capítulo é composto de quatro seções. A primeira aborda as mudanças no ensino-aprendizagem de Matemática, a segunda, como os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) tratam o estudo da Geometria, e na terceira, apresenta-se uma análise de alguns livros didáticos. Por fim, na quarta seção, tem-se a importância da Geometria.

3.1 Como os PCNs abordam o ensino da Geometria

Em relação aos PCNs, especificamente em (BRASIL, 1998) os objetivos a serem alcançados no ensino fundamental estão divididos por ciclos. Os objetivos para os anos iniciais, que hoje compreendem do 1º ao 5º ano, fazem parte do 1º e 2º ciclos. Já os objetivos para os anos finais (6º ao 9º ano) estão relacionados no 3º e 4º ciclos.

Quanto aos conceitos e procedimentos relacionados à Geometria, os mesmos são abordados na seção Espaço e Forma. Em cada ciclo, esta seção apresenta os conteúdos geométricos a serem trabalhados no Ensino Fundamental. A Geometria também é abordada na seção Grandezas e Medidas, onde faz-se a relação entre a Aritmética, a Álgebra e a Geometria.

O estudo de conceitos geométricos é parte importante no currículo de matemática do ensino fundamental por desenvolver no aluno a capacidade de compreender melhor o mundo em que vive. Porém, esta importância não está sendo levada em consideração nas aulas de Matemática, ao passo que a Geometria vem perdendo espaço nas mesmas. Esse fato é reconhecido nos PCNs quando citam:

[...] a Geometria tem tido pouco destaque nas aulas de Matemática e, muitas vezes, confunde-se seu ensino com o das medidas. Em que pese seu abandono, ela desempenha um papel fundamental no currículo, na medida em que possibilita ao aluno desenvolver um tipo de pensamento particular para compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive. (BRASIL, 1998 p. 122)

Não só nas atividades profissionais, mas também nas situações do dia a dia, é importante para o indivíduo possuir um pensamento geométrico que o orientará na observação e comunicação através do espaço tridimensional. Quando se trabalha com noções geométricas, a aprendizagem de números e medidas torna-se mais eficiente.

Nos PCNs é sugerido que se trabalhe com construções geométricas a fim de que as propriedades das figuras sejam melhor observadas e compreendidas:

O estudo dos conteúdos do bloco Espaço e Forma tem como ponto de partida a análise das figuras pelas observações, manuseios e construções que permitam fazer conjecturas e identificar propriedades. (BRASIL, 1998, p. 86)

Além disso, as construções permitem aos alunos relacionar a Matemática a outras áreas do conhecimento e ao seu cotidiano.

A seguir, uma análise de como os livros didáticos vem abordando o conteúdo de Geometria ao longo dos anos.

3.2 Análise de livros didáticos: Uma comparação de livros de diferentes décadas

O mais antigo programa de distribuição de livros didáticos iniciou-se em 1929 e foi sendo aperfeiçoado, recebendo diferentes nomes e formas de execução, até que em 1985 passa a ser chamado de Programa Nacional do Livro Didático (PNLD). No entanto, somente em 1996 estes livros começam a ser avaliados pedagogicamente.

Em relação aos livros didáticos de Matemática, percebeu-se uma drástica mudança ao longo dos anos. Nas edições mais antigas, esta disciplina era abordada desprendida da realidade e focada na resolução de numerosos exercícios. Atualmente, os livros trazem diferentes situações do dia a dia e relacionam tais situações aos conteúdos matemáticos a serem trabalhados.

Para exemplificar essas mudanças, foram analisados livros didáticos de Matemática de diferentes épocas e autores. O foco principal desta análise está em como a abordagem à Geometria vem sendo feita.

Os mais antigos são de edições da década de oitenta e o mais recente uma edição de 2016. Também, foram analisadas edições de 1997, 2011 e 2012. Os mesmos estão relacionados a seguir:

- Matemática. Antônio Sardella e Edison da Matta. 6ª série. Editora FTD (1984);
- Matemática. Fernando Trotta. 6ª série. Editora Scipione (1985);
- Matemática. Edwaldo Bianchini. 6ª série. Editora Moderna (1988);
- Matemática. Luiz Márcio Imenes e Marcelos Lellis. 7ª série. Editora Scipione (1997);
- Matemática. Edwaldo Bianchini. 8º ano. Editora Moderna (2011);

- Vontade de Saber Matemática. Joamir Souza e Patricia Moreno Pataro. 8º ano. Editora FTD (2012);
- Projeto Teláris - Matemática. Luiz Roberto Dante. 8º ano. Editora Ática (2016).

O primeiro livro didático a ser investigado foi de Sardella e Matta (SARDELLA; MATTA, 1984). Neste livro não há nenhum capítulo ou seção específica abordando Geometria. No capítulo Grandezas Proporcionais, os autores utilizam os elementos do triângulo para ensinar proporcionalidade composta.

Na apresentação do livro, os autores salientam que a intenção é abordar a parte teórica de maneira simples e objetiva, para a seguir, explorar **exaustivamente** a teoria através de exercícios. Na Figura 40 tem-se o exemplo de uma lista com trinta e um exercícios mecânicos contida neste livro. Neste exercício, pode-se observar que o enunciado indica que os autores pretendem que o aprendizado ocorra pela repetição da técnica. Ao final desta apresentação os mesmos ainda escrevem:

[...] Desejamos que este livro contribua especialmente para despertar no aluno o gosto e o interesse por essa matéria. Que ele ajude o aluno não só a aprender Matemática, mas a aprender a gostar de estudar Matemática. (SARDELLA; MATTA, 1984, p.3)

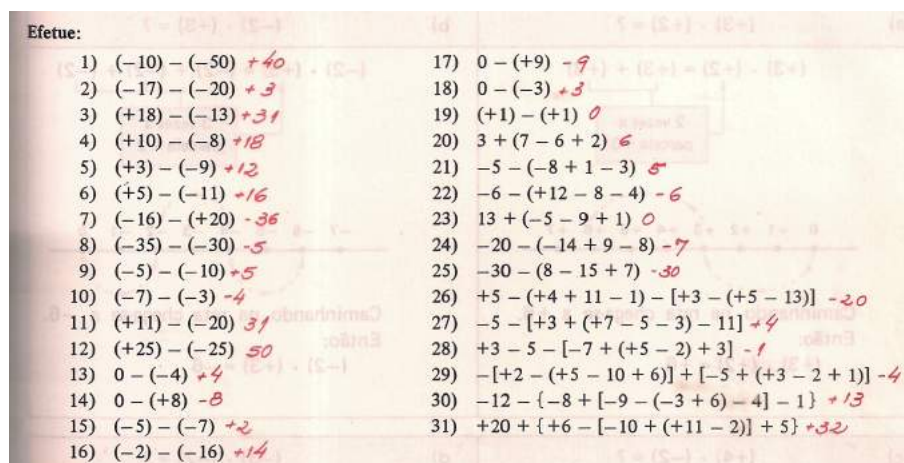


Figura 40 – Lista de exercícios

Fonte: (SARDELLA; MATTA, 1984)

Em Trotta (TROTТА, 1985) consta um capítulo específico de Geometria abordando o conteúdo de Ângulos. Este capítulo é pequeno e o último do livro, nele o autor apresenta definições e conceitos básicos envolvendo ângulos além de definir retas perpendiculares.

O que mais chama a atenção nesta abordagem à Geometria é a falta de relação do conteúdo explanado ao dia a dia dos alunos. Trotta (TROTТА, 1985) preocupa-se também, em trazer uma grande quantidade de exercícios mecânicos (denominados pelo mesmo de **exercícios comuns**), acreditando que somente assim, o aluno terá condições de fixar os conceitos.

Um capítulo abordando ângulos também é encontrado em (BIANCHINI, 1988) e, assim como no livro supracitado, o capítulo que trata de assuntos pertinentes à Geometria encontra-se no final do livro. A abordagem de (BIANCHINI, 1988) é mais completa, pois define conceitos como bissetriz de um ângulo, congruência de ângulo e ângulos opostos pelo vértice, assuntos que não foram abordados em (TROTТА, 1985).

As perguntas que ficam ao final da análise destes três livros são as seguintes: será que é possível aprender a gostar de estudar Matemática fazendo inúmeros exercícios como propõem Sardella e Matta (SARDELLA; MATTA, 1984)? E será que nem autores e nem professores percebiam que esta metodologia estava ultrapassada? A seguir, tem-se a análise de livros mais atuais, onde percebe-se que realmente aconteceram mudanças em relação à abordagem dos conteúdos matemáticos, especialmente em relação à Geometria.

Em (IMENES; LELLIS, 1997), a abordagem à Geometria ocorre em cinco capítulos diferentes. No quarto capítulo, primeiro referente à Geometria, o autor apresenta construções geométricas com dobraduras e construções utilizando instrumentos de desenho com régua e compasso. A Geometria ainda se faz presente, nos capítulos: seis, abordando ângulos e polígonos, no nono, relativo ao cálculo de perímetros, áreas e volumes, no décimo primeiro, relacionando proporcionalidade com conceitos geométricos, e no último, onde o autor ensina a construir figuras no espaço tridimensional.

Nota-se uma grande diferença entre (IMENES; LELLIS, 1997) e nos livros analisados da década de oitenta. Esta diferença não é somente em relação à abordagem da Geometria, mas também em outros aspectos, como a presença de ilustrações e fotos, e ainda, na vinculação dos conteúdos às situações reais do dia a dia. No primeiro capítulo o autor apresenta situações em que a matemática é utilizada no cotidiano, como por exemplo, na simples conferência de um troco.

Os dois livros que serão comentados a seguir foram escolhidos, pois a abordagem à Geometria é feita de maneira totalmente diferente dos anteriormente analisados nesta seção.

Em (BIANCHINI, 2011a) e em (SOUZA; PATARO, 2012a), os conteúdos geométricos são abordados de maneira bem semelhante. Em ambos os livros a Geometria aparece já no primeiro capítulo, característica bem incomum para livros de matemática. Souza e Pataro (SOUZA; PATARO, 2012a) iniciam os conteúdos, apresentando exemplos ilustrados de situações do cotidiano em que está presente a ideia de ângulos (Figura 41).

Bianchini (BIANCHINI, 2011a) inicia seu livro abordando as posições relativas entre retas seguido do conteúdo sobre ângulos. No capítulo quatro deste livro, aparece o estudo dos polígonos, o sexto é sobre triângulos, no sétimo tem-se o estudo dos quadriláteros, e no último capítulo, o autor aborda o estudo da circunferência e do círculo. Dos nove capítulos, quatro deles apresentam conteúdos Geométricos, e o autor preocupa-se em relacionar cada conteúdo trabalhado com situações do dia a dia.

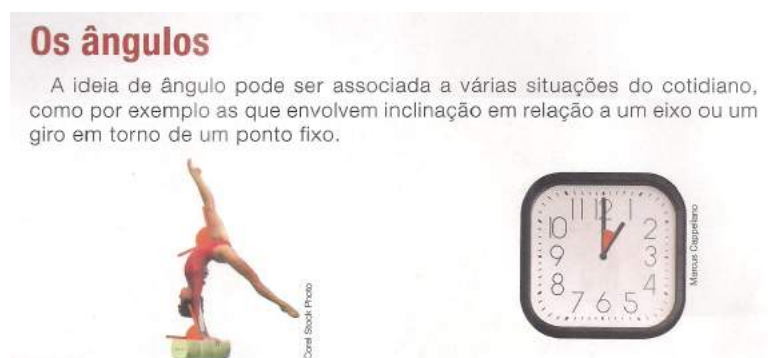


Figura 41 – Presença de ângulos no cotidiano

Fonte: (SOUZA; PATARO, 2012a)

Em (DANTE, 2016) tem-se uma abordagem ampla em relação à Geometria. Além dos conteúdos presentes nos dois últimos livros analisados, neste, o autor desenvolve um capítulo sobre a representação de sólidos geométricos no plano, trazendo planificações dos poliedros regulares, uso da malha pontilhada, quadriculada e triangular na reprodução de poliedros e ainda aborda, o desenho em perspectiva.

Nesta análise de livros, os cálculos de perímetros, áreas e volumes foram considerados conteúdos pertinentes à Geometria. Enquanto nos PCNs, estes cálculos são tratados separadamente, ao buscar o significado da palavra Geometria e seu conceito, entende-se que esta separação não deve ocorrer. Para explicar melhor esta decisão, tem-se uma definição para Geometria segundo Oliveira,

Geometria é uma palavra de origem grega que significa: “geo”, terra, e “metria”, que vem da palavra “métron” e significa medir. Sendo assim, a Geometria é uma ciência que se dedica a estudar as medidas das formas de figuras planas e espaciais, bem como sobre a posição relativa das figuras no espaço e suas propriedades. (OLIVEIRA, 2008)

Na próxima seção, algumas razões da importância de se estudar Geometria na escola.

3.3 Importância da Geometria na Escola Fundamental

A disciplina de matemática é considerada como uma das mais importantes no currículo escolar, ocupando um dos maiores percentuais de aulas semanais. No entanto, para a maioria dos alunos, esta disciplina poderia ser dispensada, ao passo que é considerada, por muitos, como a mais difícil de compreender. Muitas vezes este fato acontece, pois o ensino de matemática é apresentado de forma não contextualizada. Se o aluno não consegue relacionar o que lhe é ensinado ao seu cotidiano, torna-se muito menos motivado a aprender.

Para ajudar a mudar este conceito, um dos caminhos é valorizar o ensino da Geometria. Em muitos países isso já acontece, porém não é uma realidade do Brasil. Uma evidência disso vem do fato de que os livros didáticos abordam o assunto, na maioria das vezes, no último capítulo, e o que acontece, é que o ano letivo acaba e as noções de geometria não são trabalhadas. Isso é discutido por Imenes e Lellis (IMENES; LELLIS, 1996), que ressaltam, ainda, que a capacidade de organização e coordenação motora e visual são ligeiramente melhoradas quando a criança trabalha com formas geométricas. Há indícios de que esta vivência também colabora para o desenvolvimento cognitivo das crianças.

Um dos motivos para a importância da Geometria, está no fato da mesma estar presente no dia a dia desde os primeiros meses de vida. Toledo (TOLEDO; TOLEDO, 2009) e Carvalho (CARVALHO et al., 2010) citam o fato da criança explorar o ambiente em que vive, conhecendo o espaço e as formas nele presentes, antes mesmo de ter domínio sobre as palavras. Toledo, cita ainda, que apesar disso, em muitos currículos escolares de todo o mundo, estas vivências não eram levadas em consideração, já que a preocupação maior foi sempre com atividades ligadas à quantificação e à linguagem. A explicação para a desconsideração dada à Geometria pode estar na maneira de como a mesma era abordada antigamente, como explica Toledo:

Tal fato parece estar relacionado com a tradição - que vem desde Euclides, com sua famosa obra Elementos - de tratar dos fatos geométricos básicos de maneira axiomática, ou seja, o estudo da Geometria consistia muito mais em aprender a demonstrar teoremas do que em conhecer e interpretar propriedades das figuras geométricas. (TOLEDO, 2009 p.213)

As consequências da falta da Geometria para a vida escolar do estudante podem ser bem drásticas, já que segundo Horácio Itzcovich (ITZCOVICH, 2014) priva o aluno de se envolver com outras formas de raciocínio. Um aspecto importante, também ressaltado por Itzcovich, é o fato de que, ao se trabalhar com as propriedades dos objetos geométricos, os alunos deixam de ser meros receptores de raciocínios alheios, e passam a ser protagonistas de suas próprias deduções.

Por ser importante no desenvolvimento do pensamento matemático, os PCNs (BRASIL, 1998) orientam para o ensino da Geometria salientando que, através de seu estudo, o aluno consegue descrever, compreender e representar melhor o mundo em que vive. Além disso, quando se trabalha com a exploração de objetos ligados à Arte, por exemplo, fica mais claro ao estudante perceber e entender as conexões entre a Matemática e outras áreas do conhecimento.

As razões pelas quais deve-se ensinar Geometria na escola fundamental vão além dos aspectos utilitários, como melhorar o desempenho na resolução de problemas cotidianos, nas atividades profissionais ou nos conteúdos escolares. A Geometria é de suma importância também para a formação humana, com o objetivo de promover valores culturais importantes para a compreensão das obras do homem e da natureza. Estes aspectos são abordados por Fonseca (FONSECA et al., 2009), que enfatiza para dois objetivos básicos do estudo da Geometria na escola. O primeiro, designado como utilitário, que é o desenvolvimento na capacidade de medir, e o segundo, formativo, ligado à capacidade de pesquisar regularidades.

A Geometria é um assunto que pode ser facilmente explorado com o uso de material concreto. Na próxima seção, discute-se a importância do uso do lúdico e o material concreto para o ensino-aprendizagem de matemática.

3.4 Aspectos relevantes no ensino de Matemática - Como a Geometria e o uso de material concreto podem contribuir para um aprendizado significativo

Percebeu-se com o passar dos anos que a maneira de ensinar e aprender matemática precisava de uma transformação. A maneira antiga e tradicional de ensinar, onde o professor já trazia para a sala de aula os conceitos prontos e apenas transmitia-os aos alunos, já não poderia mais ser sustentada. O aluno não era instigado a pensar, nem a construir conhecimento, tudo o que aprendia já estava pronto, bastava apenas aplicar algoritmos para resolver exercícios. Segundo o jornalista Ricardo Dória (DÓRIA, 2016), o papel do professor era de um transmissor de conteúdos para que os alunos fossem apenas aprovados em provas.

No entanto, esse método de ensino-aprendizagem tornou-se obsoleto. Hoje, o professor deve ser um mediador e o conhecimento deve ser construído através de atividades que façam o educando pensar, criar e abstrair. Segundo os PCNs (BRASIL, 1998), o aluno deve construir e apropriar-se dos conhecimentos e estes conhecimentos servirão para compreender e transformar sua realidade.

Para que o aprendizado se concretize, o aluno precisa relacionar os conceitos ma-

temáticos à sua realidade. O educando necessita aprender com significado. Ele quer ser capaz de aplicar o que aprende em sala de aula no seu dia a dia. São muitas as vezes que se ouve a seguinte frase no ambiente escolar: “Onde vou usar isso?”

Pensando nesta e em outras indagações, que a todo momento cresce a busca por metodologias mais eficientes no que tange o ensino-aprendizagem de matemática.

Metodologias diferenciadas podem trazer resultados positivos na aprendizagem da disciplina. A inclusão de aulas práticas com materiais manipuláveis e jogos tornam as aulas mais prazerosas e atrativas aos alunos. Alves (ALVES, 2007), considera que trabalhar com jogos em sala de aula, desperta o interesse nos alunos e o desejo até mesmo de elaborar seus próprios jogos, fomentando o seu potencial de criação.

O uso de materiais manipuláveis no ensino de matemática é abordado por Rodrigues e Gazire (RODRIGUES; GAZIRE, 2012), onde ressaltam, que é possível fazer uma melhor aproximação entre teoria e prática, tornando as aulas mais dinâmicas e compreensíveis. No entanto, enfatizam que é preciso uma proposta pedagógica para nortear a utilização destes materiais, pois sem isso, a garantia de sucesso em relação ao aprendizado significativo não é assegurada.

Uma atividade lúdica proporciona uma aula diferente das tradicionais e isso faz com que a aprendizagem se torne mais eficiente. Segundo Rosário (ROSÁRIO, 2013), o uso do lúdico em sala de aula é uma forma prazerosa de educar e visa combater as práticas da educação tradicional de memorização decorando conceitos, regras e fórmulas.

No campo geométrico são diversas as possibilidades para se trabalhar em sala de aula usando materiais manipuláveis. Para explorar as figuras planas, por exemplo, pode-se fazer construções com régua e compasso, confeccionar e explorar o TANGRAM, construir figuras geométricas com elásticos no geoplano, ou ainda, utilizar canudos na construção de polígonos. Em relação ao uso de canudos para explorar a geometria plana, Correa (CORREA, 2013) enfatiza que este recurso facilita o entendimento de algumas definições geométricas, como a desigualdade triangular e a classificação das figuras planas, especialmente às relacionadas aos triângulos.

Quanto aos materiais manipuláveis que podem ser utilizados na abordagem à Geometria Espacial, pode-se destacar, o uso do material dourado, a montagem de figuras geométricas a partir de planificações, a manipulação do geoespaço e as construções de poliedros utilizando, palitos, canudos, etc. Chaves (CHAVES, 2013) salienta que a partir do uso das construções de poliedros com canudos, os estudantes são levados a perceber que os sólidos geométricos são formados pela composição de figuras planas, e conseguem fazer relação entre as semelhança de objetos do dia a dia com os sólidos confeccionados.

Outro aspecto considerado importante que ajuda na aprendizagem de matemática é uma boa relação professor-aluno. Esta afirmação é baseada em uma investigação

realizada em Portugal por (NEVES; CARVALHO, 2006), onde destaca-se: “A relação de confiança que os alunos estabelecem com os professores de Matemática, reflete na aprendizagem dos conhecimentos matemáticos”.

Portanto, ao incluir a Geometria no ensino de Matemática, um campo vasto para se trabalhar com metodologias atrativas e prazerosas, é possível melhorar o fortalecimento da relação professor-aluno, e tornar o processo de ensino-aprendizagem além de eficiente, bastante agradável.

No próximo capítulo, será apresentada a motivação que fez tornar, o que pode ser considerado como uma brincadeira de criança, uma atividade didática.

4 Sondagem sobre a aceitação da atividade e motivação para tornar esta dinâmica uma atividade didática

No último trimestre do ano letivo de 2016 foi realizado na Escola Municipal de Ensino Fundamental Ana Neri, uma atividade semelhante à apresentada neste trabalho.

A EMEF Ana Neri está localizada na rua Ana Pernigoti, próxima à RS 734, no bairro Bolaxa, em Rio Grande, no Rio Grande do Sul. Atualmente, atende alunos de todos os ciclos do ensino fundamental.

Com o simples objetivo de despertar a curiosidade dos alunos e o interesse dos mesmo pela Geometria, sem que fosse cobrada a aprendizagem de conceitos geométricos, foi realizado no oitavo ano do ensino fundamental, uma atividade de construção de alguns poliedros com canudos que posteriormente seriam utilizados na experiência de imersão em água e detergente, solução que gera a película de sabão.

Durante três semanas, uma das cinco aulas semanais de matemática ficou destinada para que os alunos construíssem os poliedros. Cada um deles confeccionou dois poliedros regulares: o tetraedro e o octaedro. Nas Figuras 42 e 43 têm-se os poliedros construídos pelos alunos.

Para a construção dos poliedros, foram utilizados canudos de pirulitos e cordão, materiais que foram fornecidos pelo professor.

Posteriormente à construção dos sólidos, o professor apresentou aos alunos a experiência de imersão dos poliedros em uma solução de água e detergente.

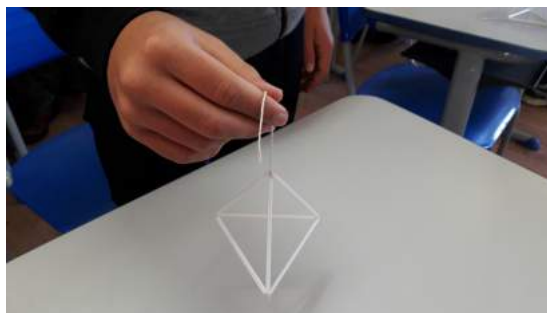


Figura 42 – Construção do tetraedro

Esta experiência foi levada para a mostra de trabalhos da escola, realizada no final do ano letivo, onde os alunos mostraram para a comunidade escolar o resultado da



Figura 43 – Construção do octaedro

atividade. Junto aos poliedros confeccionados em sala de aula pelos alunos, estavam um cubo, um prisma de base triangular e um prisma pentagonal que foram confeccionados pelo professor para diversificar e ampliar ainda mais a dinâmica. Na Figura 44 pode-se ver uma aluna observando as películas formadas no interior do prisma triangular.



Figura 44 – Imersão dos poliedros no líquido de bolhas

Observou-se que não só as crianças, mas também os adultos ficaram encantados com os formatos de bolhas que surgiram ao mergulhar tais poliedros no líquido formado por água e detergente.

Foi a partir daí, que surgiu a ideia de elaborar atividades didáticas utilizando esta prática e aplicá-las em sala de aula. Acredita-se que o encantamento com a atividade com bolhas de sabão pode contribuir significativamente para o ensino-aprendizagem de

conceitos geométricos.

No próximo capítulo, será apresentada uma proposta de atividades lúdicas visando explorar a Geometria e seus conceitos.

5 Proposta de atividades para explorar conceitos geométricos básicos

A partir dos conceitos de Geometria Espacial e dos poliedros, pretende-se relacioná-los aos conceitos elementares da Geometria Plana.

5.1 Conteúdos explorados

Neste trabalho, pretende-se usar conceitos da Geometria Espacial, e a partir dos poliedros, relacioná-los aos conceitos elementares da Geometria Plana. Durante as atividades, serão desenvolvidos os seguintes conteúdos da Geometria Plana e Espacial:

- conceitos primitivos: ponto, reta e plano;
- definição de ângulo e classificação dos ângulos quanto à medida dos mesmos;
- polígonos: elementos e classificação;
- poliedros: elementos e classificação;
- rigidez e não rigidez dos poliedros e a aplicação destas propriedades a problemas reais, por exemplo, na construção civil.

5.2 Público Alvo

Este trabalho é direcionado a alunos do terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental (sexto ao nono ano).

5.3 Local de aplicação da atividade

A Escola Municipal de Ensino Fundamental Ana Neri foi fundada em 1º de março de 1947, completando 70 anos em 2017. Atualmente, tem capacidade para atender cerca de trezentos alunos distribuídos em turmas do 1º ao 9º ano.

A escola possui sete salas de aula, além de um laboratório de informática, biblioteca e sala de recursos.

O laboratório de informática está equipado com alguns computadores e uma impressora que podem ser utilizados pelos alunos. Outro recurso tecnológico existente na

escola são alguns *netbooks* que podem ser levados para a sala de aula no caso de o laboratório estar sendo utilizado.

A partir de 2015, a escola passou a ter um conjunto de poliedros de material acrílico, que também podem ser manuseados pelos alunos durante as aulas.

5.4 Avaliação dos alunos

Os alunos serão avaliados quanto à participação e ao empenho durante a realização da atividade. Este trabalho irá compor vinte por cento do total da nota do trimestre.

5.5 Recomendações metodológicas

Nas subseções a seguir, serão apresentadas algumas sugestões de atividades para iniciar o estudo de conceitos geométricos. Para o primeiro encontro é sugerido uma pesquisa na internet, para o segundo, a construção de um tetraedro com canudos, no terceiro, a montagem de outros poliedros (octaedro, hexaedro, prisma triangular, prisma pentagonal) utilizando os mesmos materiais. Na quarta aula, a imersão dos poliedros na solução de água e detergente e por fim, no último encontro, a elaboração de um glossário com os termos geométricos utilizados durante a atividade. Concomitante com as atividades práticas, os estudantes responderão a quatro questionários.

5.5.1 Aula 1 - Pesquisa na internet

Nesta primeira aula, será realizada uma pesquisa na internet para que os alunos se familiarizem com alguns conceitos geométricos que serão trabalhados durante as aulas.

Os estudantes receberão um roteiro de pesquisa, contendo orientações e perguntas relacionadas à Geometria, como por exemplo, os conceitos e elementos de polígonos e poliedros. Este roteiro encontra-se no Apêndice A deste trabalho em versão para impressão.

Após respondidas as questões, os estudantes deverão fazer uma nova pesquisa sobre a classificação dos polígonos e poliedros, e escolher, no sítio eletrônico de busca, a opção que mostra imagens. Dentre estas imagens, os mesmos deverão identificar as duas que melhor explicam a classificação destas figuras geométricas e, se possível, imprimi-las. Uma alternativa, caso a impressão seja inviável, seria os alunos fazerem um desenho com tipos de polígonos e poliedros a partir da imagem visualizada no computador.

Os alunos também serão alertados sobre a credibilidade de alguns *sites* na internet. Sabe-se que nem tudo que está na rede é verdadeiro, e por isso as pesquisas devem ser feitas em páginas confiáveis como de universidades, do governo ou de revistas educacio-

nais. Pode-se solicitar aos alunos, anotar as fontes das imagens impressas ou que foram observadas para fazer o desenho. Isso ajudaria o professor a corrigir eventuais erros.

No final da aula, uma atividade extraclasse será lançada aos alunos: eles deverão procurar em casa ou na escola objetos que lembram poliedros, como por exemplo, caixas de calçados, de alimentos, armários, potes, etc. Os alunos deverão anotar em seu caderno os objetos encontrados e, se possível, levá-los na aula seguinte.

A pesquisa na internet, assim como a atividade de casa, servirá para ajudá-los a visualizar e diferenciar os poliedros que serão construídos durante as aulas.

O tempo previsto para a realização desta atividade é de 1 hora aula de 45 minutos. Caso a alternativa de desenhar os poliedros seja a escolhida, este tempo deverá ser ampliado para 2 horas aula de 45 minutos cada.

5.5.2 Aula 2 - Construção do tetraedro

Pretende-se apresentar, nesta aula, uma técnica de construção de poliedros utilizando dois tipos de materiais: canudos e cordão (Figura 45). Esta técnica consiste em: passar o fio através dos canudos; utilizar nós para não desmanchar; e, se necessário ainda, passar o barbante mais uma vez por dentro de um mesmo canudo.



Figura 45 – Materiais necessários para construção do tetraedro

Para dar sequência à aula anterior, no primeiro momento, os alunos deverão citar aleatoriamente objetos encontrados semelhantes a poliedros ou apresentar os seus aos colegas. Neste momento, caso algum dos poliedros citados ou apresentados possuam características não condizentes, como faces arredondadas, o professor pode chamar a

atenção dos alunos e explicar que para ser poliedro é necessário que todas as faces sejam planas.

Os alunos deverão trazer para esta aula o material impresso por eles na aula anterior, onde poderão observar o poliedro que será construído. O professor poderá também, montar anteriormente um modelo de tetraedro para ser apresentado. Como trata-se de um poliedro de simples montagem, todos os estudantes deverão construí-lo individualmente.

A atividade inicia-se pela apresentação do poliedro e pela distribuição dos materiais que serão utilizados para construí-lo: serão necessários 6 canudos medindo 9 centímetros cada e 1 metro de cordão para construir cada tetraedro.

⇒ Dicas para o professor:

- Os canudos de pirulitos já vêm com 9 centímetros e são mais rígidos, o que facilita a construção;
- a espessura do cordão é especificada quanto ao número de fios que o compõem, sendo o ideal para utilizar com canudos de pirulito, o cordão de 3 fios.

O professor orientará os alunos na técnica de construção. É interessante que os próprios alunos consigam construir os poliedros, sem que o professor tenha que orientá-los a cada passo, permitindo assim, que eles experimentem diferentes maneiras de construir o objeto proposto.

Caso os alunos encontrem muita dificuldade no início da construção do tetraedro, o professor poderá orientá-los a iniciar pela montagem de um triângulo, ou utilizar um passo a passo que pode ser impresso e está disponível no Apêndice E.

Após a construção do tetraedro com canudos, é possível relacionar os principais elementos deste poliedro com noções e conceitos da Geometria. Para isso, os alunos receberão uma atividade que deverá ser respondida individualmente e entregue ao professor. A primeira questão visa analisar a capacidade de observação dos alunos. A segunda, tem por objetivo, verificar se a pesquisa na internet contribuiu para o aprendizado dos principais elementos de um poliedro. E por fim, a terceira questão, com o intuito de verificar se os estudantes possuem alguma noção dos conceitos básicos da geometria.

Esta atividade encontra-se no Apêndice B em versão para impressão.

O tempo previsto para apresentação dos objetos semelhantes a poliedros é cerca de 20 minutos, para a construção do tetraedro, aproximadamente 45 minutos e para reso-

lução da atividade Relacionando Conceitos Geométricos - Apêndice B - mais 25 minutos, totalizando 2 horas aula de 45 minutos cada.

5.5.3 Aula 3 - Construção dos demais poliedros

Para esta aula, a turma será dividida em grupos (mínimo 8) de no máximo quatro alunos. Cada grupo ficará responsável pela construção de um poliedro entre os seguintes: octaedro regular, hexaedro regular (cubo), prisma de base triangular e prisma de base pentagonal. O poliedro a ser construído por cada equipe pode ser escolhido por sorteio ou a decisão poderá ficar a critério do professor.

Os materiais que serão utilizados nestas construções são: cordão, canudos e arame (Figura 46). A quantidade de material a ser utilizado na construção de cada sólido geométrico é diferente. Na Tabela 3 tem-se o número de canudos, o tamanho aproximado de cordão e a quantidade de pedaços de arames necessários para a construção de cada poliedro.



Figura 46 – Materiais necessários para construção dos poliedros

Os arames deixarão os poliedros rígidos e deverão ser cortados em pedaços de aproximadamente 5 centímetros cada. A espessura ideal é 0,89 milímetros.

Como serão construídos dois poliedros de cada, a quantidade total de canudos, cordão e arames necessários para esta aula são: um pacote de canudos de pirulito contendo

Tabela 3 – Quantidade de materiais para construção dos poliedros

Poliedro	Canudos	Cordão (em metros)	arames
Octaedro	12	2	-
Hexaedro	12	2	16
Prisma de base triangular	9	1,5	12
Prisma de base pentagonal	15	2,5	20

100 unidades, 16 metros de cordão e 5 metros de arame.

Para nortear os alunos nesta elaboração, é importante que o professor leve os modelos de poliedros a serem construídos e os apresente a turma. Os próprios alunos, de posse dos modelos, poderão fazer a contagem da quantidade de canudos necessários, como também, conseguirão criar estratégias para a construção dos mesmos. Inicialmente, deve-se distribuir somente os canudos e o cordão. A colocação dos arames nos vértices dos poliedros maleáveis deve ser feita no final da aula.

O professor poderá levar para esta aula o passo a passo para elaboração do octaedro e do cubo, assim como as dicas para a construção dos prismas contidos no Apêndice E em versão para impressão.

Ao final destas construções e para dar continuidade ao aprendizado de conceitos geométricos, cada aluno receberá uma atividade que deverá ser respondida e entregue ao professor. Nesta atividade, os alunos responderão questões relativas ao poliedro construído por eles, como a quantidade de vértices, faces e arestas, formato dos polígonos das faces, ângulos destes polígonos e ainda, sobre a rigidez ou não deste sólido.

Este questionário encontra-se no Apêndice C em versão para impressão.

Para realizar a atividade da aula seguinte, os poliedros deverão estar todos rígidos. Para isso, os alunos receberão os arames que deverão ser dobrados e colocadas nos vértices dos poliedros (Figura 47). Em cada encontro de canudos serão necessários dois arames. A critério dos alunos que quiserem embelezar seus poliedros, poderão arrematar com argila ou com massa epóxi bicomponente (DUREPOXI[®]) os vértices do mesmo. No entanto, ao passo que a argila em contato com a água poderá amolecer, a segunda opção parece a mais indicada.

O tempo previsto para construção dos poliedros é de aproximadamente 1 hora, para responder as questões da atividade Aprendendo Conceitos Geométricos - Apêndice C - cerca de 15 minutos e para colocação dos arames nos poliedros outros 15 minutos, totalizando 2 horas aulas de 45 minutos cada.



Figura 47 – Arames cortados (esquerda) e arames dobrados (direita)

5.5.4 Aula 4 - Imersão dos poliedros na solução de água e detergente

Neste encontro, os alunos utilizarão os poliedros construídos por eles e experimentarão a técnica de imersão dos mesmos em uma solução contendo água e detergente.

Os materiais necessários para esta aula são: recipiente grande (balde ou bacia com no mínimo 20 centímetros de altura), água, detergente de louça, pano ou papel toalha.

Primeiramente, deve-se colocar a água no recipiente e em seguida, adicionar o detergente lentamente, misturando-os com movimentos suaves. Para cada 5 litros de água, deve-se misturar, aproximadamente, 250 mililitros de detergente. A quantidade de água deve ser suficiente para cobrir os poliedros.

O professor pode solicitar um aluno voluntário para mergulhar um poliedro na solução, pedindo que ainda não o levante. Neste momento, orienta-se que o docente faça perguntas com relação ao formato das películas que surgirão nos poliedros, como por exemplo, se a película se formará nas faces ou não. Sugere-se ainda, que a imersão inicie pelo tetraedro, seguido pelo prisma de base triangular, cubo, prisma de base pentagonal e por fim, o octaedro.

Com as películas formadas dentro do tetraedro, pode-se fazer uma relação com os conceitos primitivos da geometria. Cada película, por exemplo, representa um plano. No encontro de três películas, tem-se a ideia do conceito de reta. E no centro do tetraedro, quando três retas se intersectam, forma-se um ponto.

Na imersão dos demais poliedros, os conceitos primitivos da Geometria, também podem ser observados.

Para deixar esta aula ainda mais interessante, pode-se perguntar aos alunos se eles conhecem bolha de sabão com formato triangular ou já viram alguma bolha quadrada. Para se obter estes formatos, basta mergulhar duas vezes o tetraedro e o cubo, e as bolhas triangular e quadrada, respectivamente se formarão.

O tempo previsto para realização desta atividade é 1 hora aula de 45 minutos.

5.5.5 Aula 5 - Elaboração de um glossário e questionário de satisfação

Neste dia, será elaborado um glossário com os termos e conceitos matemáticos utilizados durante a realização desta atividade.

O professor levará para a sala de aula livros didáticos de matemática de diferentes autores e anos do ensino fundamental.

Primeiramente, o docente perguntará aos alunos, que termos matemáticos foram utilizados por eles e pelo professor durante a realização das atividades de pesquisa, construção e imersão. As palavras citadas pelos alunos serão escritas no quadro. Neste momento, os livros serão entregues e os alunos deverão tentar encontrar o significado de cada vocábulo citado por eles. O professor ajudará os estudantes nesta pesquisa, e juntos, descobrirão os significados dos termos utilizados. Pode-se pedir a ajuda de três alunos voluntários: um para escrever os conceitos no quadro, outro para copiar e um terceiro que ficará encarregado de digitalizar este glossário para que posteriormente todos tenham uma cópia.

No final da aula, os alunos responderão um questionário de satisfação, onde poderão expressar como sentiram-se durante as aulas em que a atividade foi aplicada. Este questionário está disponível no Apêndice D em versão para impressão.

O tempo previsto para realização destas duas atividades é de 2 horas aulas de 45 minutos cada, sendo que para responder ao questionário de satisfação, são necessários apenas 10 minutos.

5.6 Resultados esperados

Assim como já citado na seção 3.4, o uso de material concreto em sala de aula é de extrema importância no processo de ensino-aprendizagem, pois além de estimular o raciocínio lógico, aumenta a criatividade.

A escolha de uma metodologia que se inicia pela construção do objeto que se queira estudar, pode eximir o aluno da memorização. O educando, a partir do processo de construção, vai familiarizando-se com os conceitos que posteriormente serão enunciados, e isso contribui para uma aprendizagem mais significativa.

Ao participar de aulas diferenciadas, o aluno sente-se motivado a aprender Matemática. É importante que as atividades desenvolvidas em sala de aula sejam atrativas e prazerosas, que os estudantes se envolvam em cada tarefa, e que com isso, consigam apropriar-se dos conhecimentos matemáticos propostos.

Portanto, ao utilizar a metodologia de ensino sugerida neste trabalho, uma atividade lúdica e capaz de envolver os alunos, que relaciona os conhecimentos estudados à

realidade e ao cotidiano dos mesmos, espera-se que o processo de ensino-aprendizagem de conceitos geométricos torne-se muito mais eficiente.

Espera-se também, que na continuação do estudo de Geometria, quando os conceitos geométricos forem retomados para serem detalhadamente trabalhados, que aluno aproveite estas vivências e informações prévias, para aprimorar o processo de construção de conhecimento.

6 Relato da aplicação e análise dos resultados

Neste capítulo, consta o relato e a análise dos resultados das construções e atividades aplicadas entre os dias 29 de maio e 9 de junho de 2017 em três turmas da EMEF Ana Neri, escola já descrita no capítulo 4. As características das turmas onde foram aplicadas as atividades são as seguintes:

- Sexto ano A - Composta por vinte e cinco alunos, todos já estudantes da escola, sendo vinte e três oriundos do quinto ano e dois repetentes.
- Sexto ano B - Composta por vinte e um alunos, com doze oriundos de outras escolas, e nove alunos antigos, sendo oito vindos do quinto ano e um repetente.
- Oitavo ano - Composta por vinte e oito alunos, com três oriundos de outras escolas e vinte e cinco alunos antigos, sendo vinte e quatro destes, vindos do sétimo ano, e um repetente.

6.1 Aula 1

A primeira parte da atividade foi a pesquisa na internet. Cada turma ocupou o laboratório de informática separadamente durante suas respectivas aulas de matemática (Figura 48).



Figura 48 – Alunos no laboratório de informática

Estavam presentes vinte alunos do sexto ano A, dezessete alunos do sexto ano B e vinte e três alunos do oitavo ano. Antes dos estudantes iniciarem a navegação, foi entregue aos mesmos um roteiro, disponível no Apêndice (A), com orientações para a realização da pesquisa e questões relativas à Geometria que deveriam ser respondidas.

Na questão a) os alunos deveriam responder sobre o conceito de Geometria. Nesta questão, apenas cinco alunos do sexto ano A não conseguiram transcrever respostas coerentes. Os demais encontraram respostas bem satisfatórias.

A questão b) era sobre o conceito de polígono e a c) referia-se aos elementos do mesmo. Dos setenta alunos presentes nas três turmas, vinte e cinco deles já incluíram os elementos do polígono na questão que tratava do conceito, não percebendo que isso era para ser respondido na questão seguinte.

Na questão d) os alunos deveriam responder o que eram poliedros. Do oitavo ano, apenas dois alunos não conseguiram transcrever corretamente este conceito. Do sexto ano B, dois alunos deram apenas exemplos de poliedros nesta questão, e mais dois descreveram os elementos dos poliedros ao invés de trazer o conceito do mesmo. Do sexto ano A, com exceção de dois alunos, que deixaram a questão em branco, os demais conseguiram encontrar na internet respostas condizentes com o conceito de poliedros.

Para a questão e) os alunos deveriam transcrever os tipos de poliedros. As respostas foram variadas e muito semelhantes nas três turmas: vinte e sete dos setenta alunos citaram, nesta questão, o nome dos poliedros regulares (tetraedro, octaedro, etc.). Somente treze estudantes conseguiram transcrever respostas próximas das esperadas, que deveriam citar os poliedros convexos e não convexos, regulares e irregulares e os poliedros de Platão. A grande maioria dos alunos das três turmas se equivocou ao responder a esta questão.

A questão f) era sobre os principais elementos do poliedro. Na Figura 49, estão as respostas de um aluno para a pesquisa realizada na internet. Este aluno foi um dos que apresentou as respostas mais próximas das esperadas.

O gráfico apresentado na Figura 50 mostra o percentual de respostas consideradas condizentes com as esperadas em cada turma, e também, ajuda a fazer uma comparação entre as mesmas.

Ao analisar este gráfico, percebe-se que a questão que se refere aos tipos de poliedros - e) - foi a que apresentou menos respostas corretas. Acredita-se que o motivo para este resultado insatisfatório, seja pelo fato da questão ter sido mal formulada. A alternativa seria ter perguntado sobre a classificação dos poliedros ao invés de tipos de poliedros. Na versão para impressão, contida no Apêndice A, este questionamento foi alterado.

Depois de respondidas as questões, os alunos deveriam pesquisar e imprimir ima-

- a) O que é geometria? É parte da matemática cujo objeto é o estudo do espaço e das figuras que podem ocupá-lo.
- b) O que são polígonos? Polígonos são figuras fechadas formadas por segmentos de reta e são caracterizados pelos elementos: ângulos, vértices, diagonais e lados.
- c) Quais são os elementos de um polígono? Os elementos são: vértices, lados, ângulos internos, ângulos externos e diagonais.
- d) O que são poliedros? É um sólido limitado por superfícies planas poligonais.
- e) Quais os tipos de poliedros? Os tipos são: regulares e irregulares, convexos e não convexos.
- f) Quais são os principais elementos de um poliedro? São faces, arestas e vértices.

Figura 49 – Respostas de um aluno na pesquisa na internet

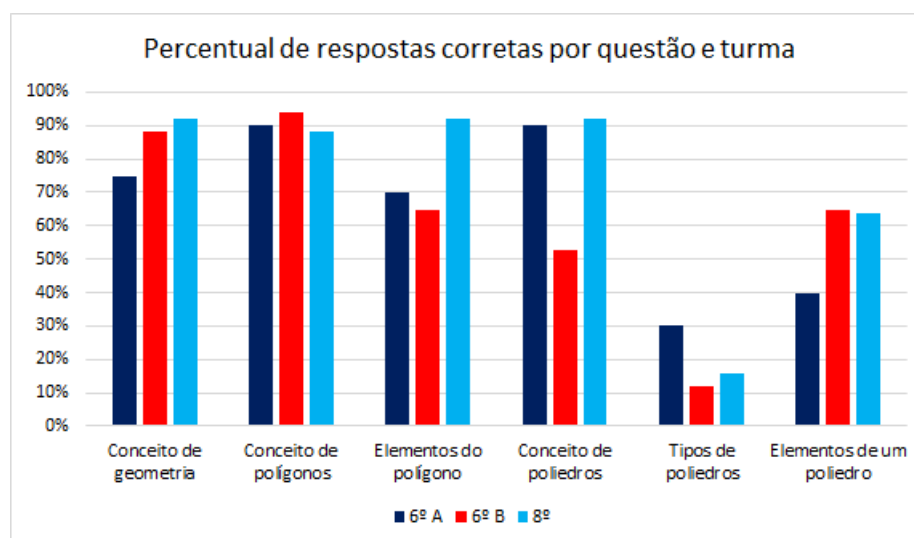


Figura 50 – Respostas condizentes com as esperadas

gens de polígonos e poliedros. Foi neste momento, que um problema enfrentado pela escola, em relação a substituição dos computadores estragados, veio à tona. Como esta troca não está sendo feita, a solução encontrada foi a utilização dos *netbooks*. No entanto, estes computadores não comportam impressão em rede e os alunos não puderam imprimir as imagens a partir dos *netbooks*. Surgiu, então, na primeira turma, (o que posteriormente virou regra para as demais) a seguinte ideia: ao passo que os estudantes iam terminando de responder as questões, um a um se dirigia ao computador que possui conexão com as impressoras, repetiam as pesquisas, escolhiam as imagens e as imprimiam. Ao perceber

que o tempo seria insuficiente para todos escolherem e imprimirem suas consultas, foi sugerido que alguns alunos imprimissem mais de uma cópia de suas pesquisas e dividissem com os demais colegas que não tiveram a oportunidade de imprimir suas próprias buscas.

Outra alternativa, para a inviabilidade de impressão, é utilizar o celular, caso seu uso seja permitido na escola, para fotografar as imagens de polígonos e poliedros pesquisadas.

Estas imagens impressas tiveram o objetivo de nortear os alunos para que a tarefa de casa fosse realizada: os mesmos deveriam procurar objetos que lembrassem os formatos dos poliedros e anotar no caderno o nome destes objetos. Também, se fosse possível, trazer algum deles para a aula seguinte.

O rendimento desta aula foi diferente em cada turma. O sexto ano B, necessitou de dois períodos de 45 minutos para a conclusão da pesquisa, enquanto o sexto ano A e o oitavo ano terminaram a pesquisa no tempo previsto de uma hora aula de 45 minutos.

6.2 Aula 2

No primeiro momento desta aula, os alunos citaram e apresentaram os objetos encontrados que lembravam o formato dos poliedros. Como pode-se observar no canto superior direito da foto da Figura 51 alguns objetos trazidos pelos alunos do sexto ano A, foram separados dos demais. Os estudantes foram indagados por que havia sido feita aquela separação. Alguns, rapidamente entenderam que para ser considerado poliedro, não pode haver partes arredondadas. Neste momento, o professor, aproveitou para elogiá-los, pois foi a turma que mais apresentou objetos e salientou, ainda, que o erro na escolha também foi importante para o aprendizado de geometria.

Neste dia, os alunos também fizeram a construção do tetraedro seguida da realização da atividade Relacionando Conceitos Geométricos, disponível no Apêndice (B) em versão para impressão. Estavam presentes vinte e quatro alunos do sexto ano A, dezoito do sexto ano B e vinte e seis do oitavo ano.

É importante salientar, que estas atividades foram realizadas em dias e horários diferentes em cada turma, conforme o rendimento das mesmas e horários de suas respectivas aulas.

A aula iniciou-se com a distribuição do material e apresentação de um modelo de tetraedro de canudos. A ideia era que os estudantes criassem estratégias para a construção sem a utilização de um roteiro pronto. As únicas instruções dadas pelo professor foram que eles deveriam passar o cordão por dentro do canudo e iniciar pela construção de um triângulo. Os passos seguintes eles deveriam inventar e experimentar até que conseguissem construir o poliedro em questão.

Após o término da construção, os alunos receberam a atividade Relacionando Conceitos Geométricos, disponível para impressão no Apêndice (B) deste trabalho. Os mesmos deveriam observar o tetraedro e responder as questões sem consultar qualquer material de apoio. Os alunos foram orientados a lembrarem-se dos conceitos pesquisados na internet e relacioná-los ao tetraedro.

O gráfico da Figura 53 ilustra como foram os resultados obtidos em cada turma por questão.

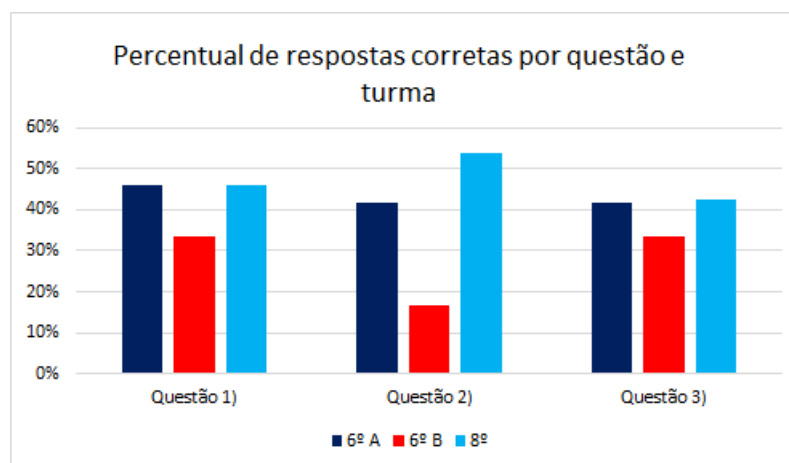


Figura 53 – Atividade: relacionando conceitos geométricos

Pode-se notar que o rendimento da maioria das turmas foi insatisfatório. Apenas o oitavo ano, na questão dois, conseguiu um aproveitamento superior a 50%. Alguns alunos, por exemplo, até conseguiam citar os elementos dos poliedros durante a realização desta atividade, porém quando tinham que relacionar esses termos ao tetraedro construído confundiam, vértices com arestas.

Acredita-se que para um melhor aproveitamento desta atividade, a mesma deva ser aplicada ou reaplicada após realizadas todas as etapas desta proposta, ou seja, posterior à elaboração do glossário. Um dos motivos pelos quais acredita-se que os alunos não tenham conseguido relacionar corretamente os conceitos propostos nesta atividade, seja pelo fato de que a pesquisa na internet e a construção do tetraedro tenham sido os primeiros contatos dos mesmos com a Geometria e seus conceitos.

6.3 Aula 3

Nesta aula, os alunos construíram mais quatro tipos de poliedros e fizeram a atividade Aprendendo Conceitos Geométricos, disponibilizada para impressão no Apêndice (C). Estavam presentes vinte e quatro alunos do sexto ano A, dezoito do sexto ano B e vinte e quatro do oitavo ano.

Os poliedros construídos foram: octaedro, hexaedro, prisma de base triangular e prisma pentagonal. Em cada turma, os alunos foram orientados a formarem oito grupos, para que dois grupos diferentes construíssem um mesmo poliedro. Os primeiros que se organizaram puderam escolher o sólido que iriam construir a partir dos modelos levados pela professora.

Em seguida, foram colocados no quadro, os nomes dos poliedros a serem construídos e os respectivos grupos. Os alunos deveriam contar nos modelos a quantidade de canudos necessária para a construção. Dois estudantes ficaram responsáveis pela distribuição dos canudos e do cordão.

A maioria dos alunos já foi criando estratégias para a construção dos poliedros. Observou-se que para a montagem do prisma, os mesmos começaram pela construção dos polígonos das bases, seguido pela montagem das arestas laterais (Figura 54). Essas ideias foram transformadas em dicas de construção e encontram-se no Apêndice E para impressão.

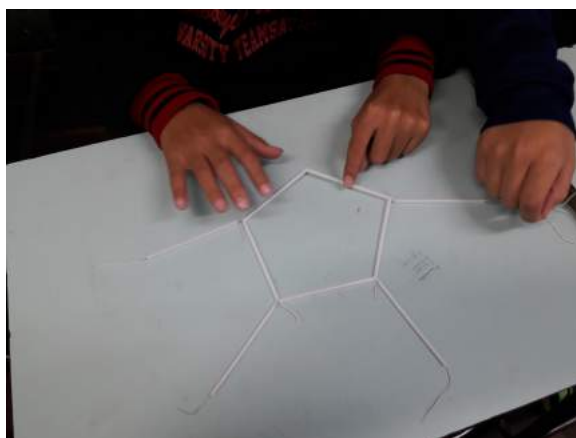


Figura 54 – Construção do prisma

O poliedro que os alunos encontraram maior dificuldade na construção, e isso foi observado nas três turmas, foi o octaedro. Na foto da Figura 55, pode-se notar o empenho de um aluno do oitavo ano em tentar posicionar os canudos para a montagem do octaedro. No sexto ano B, um grupo teve bastante dificuldade e necessitou de dicas para iniciar a construção. Foi sugerido aos mesmos, que iniciassem pela montagem de um quadrado.

Um aspecto bastante interessante observado nestas construções foi a importância do trabalho em grupo. Na foto da Figura 56 pode-se observar a cooperação necessária para a construção do cubo.

Nas construções desta última aula, os estudantes estavam ansiosos pelo fato dos poliedros (exceto octaedro) não estarem ficando rígidos. Os mesmos foram tranquilizados, e explicou-se que isto era uma característica dos poliedros, e que, na atividade que

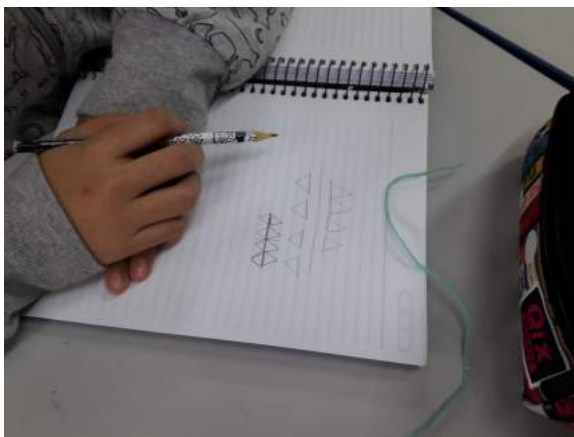


Figura 55 – Aluno criando estratégias para construção do octaedro



Figura 56 – Colaboração na construção do cubo

receberiam a seguir, eles conseguiriam entender melhor este fato.

Ao passo que os estudantes foram terminando as construções, foi entregue a atividade Aprendendo Conceitos Geométricos, disponível para impressão no Apêndice (C). Os alunos deveriam responder sete questões com base nos poliedros construídos e estabelecer relações com os conceitos pesquisados na primeira aula. Verificou-se que as dúvidas em relação aos elementos dos poliedros haviam diminuído, porém, em relação aos ângulos pôde-se notar que a maioria dos alunos das três turmas não haviam tido nenhum contato com este conceito até o momento.

Quanto à última questão, os alunos deveriam responder sobre a rigidez ou não do poliedro construído. Os mesmos deveriam comentar se esta característica possui relação com o formato das faces dos mesmos. Somente dois grupos, um do sexto ano A e outro do oitavo ano, conseguiram compreender de fato esta particularidade dos poliedros com faces triangulares.

O gráfico da Figura 57 ilustra melhor a quantidade de grupos que respondeu corretamente cada questão por turma.

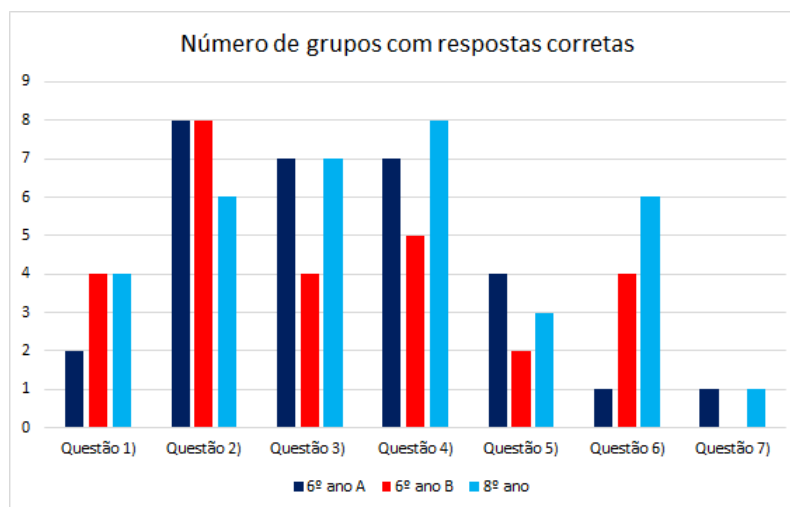


Figura 57 – Resultados da atividade Aprendendo Conceitos Geométricos

Através de uma observação minuciosa do gráfico da Figura 57 é possível perceber que a turma que obteve melhor desempenho nesta atividade foi o oitavo ano, seguida do sexto ano A e, novamente, observa-se um baixo rendimento no sexto ano B.

Após os poliedros serem construídos e a atividade Aprendendo Conceitos Geométricos - Apêndice C, ter sido realizada, os alunos deveriam enrijecer os poliedros sem estabilidade, colocando pedaços de arames nos vértices. No entanto, a professora acabou esquecendo de levar os arames para a aula, tendo que esta parte da atividade ser realizada no início da aula seguinte.

6.4 Aula 4

Neste dia, foi realizado o experimento de imersão dos poliedros na solução de água com detergente. Estavam presentes vinte e cinco alunos do sexto ano A, dezessete do sexto ano B e vinte e quatro do oitavo ano.

Antes do início do experimento, foram distribuídos pequenos pedaços de arame para os grupos que precisavam tornar os poliedros rígidos. Os alunos foram orientados a dobrar os arames e enfiar nos vértices dos poliedros para, assim, obter uma estrutura firme. Enquanto isso, dois alunos ficaram encarregados de ajudar a professora com o transporte da bacia contendo água e detergente.

No sexto ano A, os dois grupos responsáveis pela construção do prisma pentagonal não trouxeram o poliedro para a aula de imersão. Nesta turma, os alunos tiveram que usar o prisma pentagonal confeccionado pela professora.

Uma aluna do sexto ano A, trouxe de casa o cubo feito pelo seu grupo já enrijecido. A mesma usou arames e DUREPOXI[®] nos vértices para deixá-lo firme e com um melhor acabamento.

Quando todos os grupos já estavam com seus poliedros prontos, pôde-se dar início à aula de imersão. Um voluntário foi chamado para iniciar o experimento desta técnica que começou pelo tetraedro. Porém, antes do aluno retirar o poliedro do líquido, os estudantes foram questionados sobre como se formariam as películas no poliedro. Alguns disseram que se formariam nas faces e outros que não sabiam.

Após esta conversa, o aluno então, ergueu o tetraedro (Figura 58), deixando a maioria dos colegas bem surpresos com o resultado. Neste momento, mais uma vez, os alunos foram questionados sobre que conceito primitivo (ponto, reta ou plano) se formava na reunião das películas no interior do tetraedro. Alguns alunos conseguiram perceber que na interseção do centro formava-se um ponto.



Figura 58 – Películas formadas no interior do tetraedro

O segundo poliedro imerso foi o prisma de base triangular (Figura 59). Novamente, os questionamentos sobre os formatos das películas foram repetidos. Alguns estudantes conseguiram perceber a existência de dois conceitos primitivos nas interseções das películas deste prisma: ponto e reta.

Os alunos puderam observar e concluir que o cubo e o prisma pentagonal, quando imersos na solução de água e detergente, formam no seu interior um quadrado e um pentágono, respectivamente. Na foto da Figura 60 têm-se o resultado da imersão do prisma pentagonal.

Os estudantes ficaram admirados com os diversos planos de películas que o octaedro apresentou no seu interior.

Os alunos do sexto ano B tiveram a iniciativa de contabilizar as películas formadas no interior de cada poliedro, concluindo o seguinte (Tabela 4):

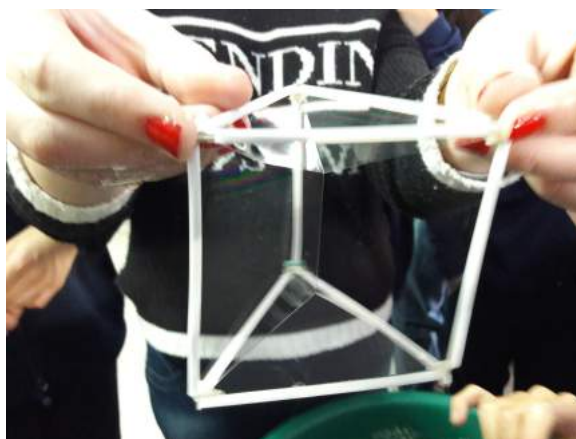


Figura 59 – Películas formadas no interior do prisma triangular



Figura 60 – Películas formadas no interior do prisma pentagonal

Tabela 4 – Quantidade de películas no interior dos poliedros

Poliedro	Quantidade de planos de películas observados
Tetraedro	6
Prisma triangular	9
Hexaedro	13
Prisma pentagonal	16
Octaedro	Não foi possível contabilizar

Após todos os alunos experimentarem a imersão dos poliedros e observarem os interessantes formatos das películas, mais uma vez, foram instigados ao serem questionados sobre a possibilidade de formação de bolha “quadrada” e “triangular”. Alguns alunos do sexto ano A, que participaram da mostra de trabalhos no ano anterior, disseram já ter visto este feitio de bolhas, no entanto, a maioria dos estudantes continuavam ansiosos e curiosos para observar estes formatos. Na foto da Figura 61, observa-se uma bolha

quadrangular no interior do cubo.



Figura 61 – Bolha quadrada

Os alunos, puderam então, brincar livremente com os poliedros e observar ainda mais as películas formadas nos seus interiores. Outro aluno do sexto ano A, conseguiu compor no interior do prisma pentagonal um sólido semelhante ao mesmo.

6.5 Aula 5

Na última aula deste projeto, os alunos elaboraram um glossário de termos utilizados e responderam um questionário de satisfação. Estavam presentes vinte e quatro alunos no sexto ano A, dezessete do sexto ano B e vinte e sete do oitavo ano.

Para a elaboração do glossário, foi solicitado aos alunos que tentassem lembrar de termos geométricos utilizados durante as aulas de pesquisa, construção e imersão de poliedros.

Enquanto os alunos citavam os termos, a professora listava-os no quadro. Em seguida, foram distribuídos aos alunos vários exemplares de livros didáticos de matemática de diferentes anos e autores para que o significado desses termos fossem pesquisados e pudessem ser discutidos com a turma. Os livros utilizados pelos alunos estão listados na Tabela 5.

No sexto ano B, uma aluna ofereceu-se para escrever os conceitos no quadro, conforme pode-se observar na foto da Figura 62, outra aluna copiava em uma folha, enquanto os demais alunos, junto com a professora buscavam pelos significados nos livros disponíveis.

Os alunos, através dos poliedros de canudos, foram levados a perceber os ângulos retos, agudos e obtusos.

Tabela 5 – Livros utilizados para elaboração do glossário

Título	Autor(es)/Ano	Classe	Editora
Matemática	(BIANCHINI, 2011b)	6º ano	Moderna
Matemática - Projeto Araribá	(LEONARDO, 2010)	7º ano	Moderna
Matemática	(BIANCHINI, 2015b)	8º ano	Moderna
Matemática	(BIANCHINI, 2015a)	6º ano	Moderna
Vontade de Saber Matemática	(SOUZA; PATARO, 2012b)	6º ano	FTD
A Conquista da Matemática	(CASTRUCCI; GIOVANNI, 1992)	7ª série	FTD
A Conquista da Matemática	(JÚNIOR; CASTRUCCI, 2009)	6º ano	FTD
Matemática - Projeto Teláris	(DANTE, 2015)	6º ano	Ática
Projeto Araribá - Matemática	(GAY, 2014)	6º ano	Moderna
Matemática - Projeto Teláris	(DANTE, 2013)	8º ano	Ática

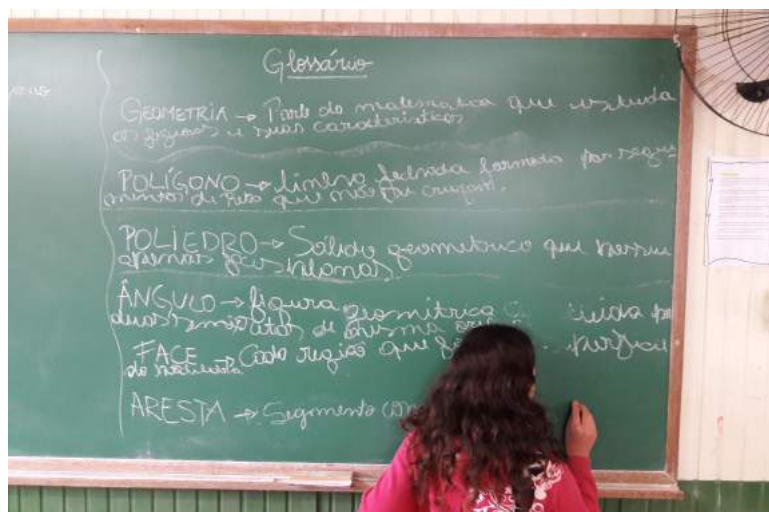


Figura 62 – Construção do glossário - sexto ano B

Os termos polígono e poliedro, assim como seus elementos, receberam definição. Os alunos puderam compreender a classificação dos polígonos em função do número de lados, e perceberam que os poliedros recebem nomes especiais dependendo do número de faces.

Os estudantes também conseguiram entender melhor a característica geométrica que diferencia os poliedros quanto à rigidez e à maleabilidade, ou seja, que somente os poliedros com faces triangulares são estáveis e que por isso são amplamente utilizados na construção civil. A professora citou o exemplo das grades pantográficas para o uso da maleabilidade dos poliedros. Durante a aula no sexto ano A, uma aluna lembrou que esta propriedade também se faz presente nos varais sanfonados.

Curiosamente, dentre todos os termos citados pelos alunos, três definições não

foram encontradas nos livros: ponto, reta e plano. Foi explicado, então, que esses três conceitos são conceitos primitivos da Geometria e não possuem definição. Os estudantes foram levados a imaginar plano e reta, usando exemplos como a parede da sala de aula crescendo para todos os lados indefinidamente e o canudo ou barbante utilizados por eles aumentando de tamanho para a direita e para a esquerda. Para que os mesmos pudessem ter a ideia do que vem a ser um ponto, foi pedido que imaginassem o barbante vindo em sua direção.

Em cada turma, um aluno ficou responsável por copiar e outro por digitalizar o glossário, organizando em ordem alfabética os termos e os respectivos significados. Posteriormente, uma cópia será disponibilizada a cada aluno.




No segundo momento da aula, os alunos responderam a um Questionário de Satisfação (D) com o objetivo principal de saber como os estudantes sentiram-se durante as atividades de pesquisa, construção e imersão de poliedros e se, de fato, as mesmas teriam sido úteis para o aprendizado de conceitos geométricos.

Para que os alunos fossem justos em suas respostas, foi solicitado que os mesmos não identificassem com nome o questionário respondido, apenas fossem preenchidos a idade e a turma. No sexto ano A, são quatorze alunos com 11 anos, sete alunos com 12 e três alunos com 13 anos, no sexto ano B, um aluno possui 10 anos, oito tem 11 anos, sete possuem 12 e um com 13 anos de idade. Já no oitavo, um aluno disse ter 12 anos, dezoito ter 13, sete, 14 anos e um aluno com 16.

Na primeira questão, os estudantes deveriam opinar sobre a aula no laboratório de informática: se, de fato, teria sido útil para a construção dos poliedros. Na segunda questão, como os mesmos se avaliavam durante a construção dos poliedros, na terceira pergunta, uma avaliação da aula de imersão dos poliedros na solução de água e detergente e na quarta questão, citar os conceitos geométricos aprendidos durante as atividades. Por fim, caso quisessem, poderiam deixar sugestões para as próximas aulas de Matemática.

Nas Tabelas 6, 7 e 8 pode-se acompanhar a opinião dos alunos em cada turma.

Tabela 6 – Sexto ano A

Questões				Ausente
Pesquisa na internet	16	3	3	2
Construção dos poliedros	16	8	0	0
Imersão no líquido de bolhas	20	3	1	0
Aprendeu novos conceitos	23	-	1	-

Pela análise das Tabelas 6, 7 e 8, é possível afirmar que as atividades desenvolvidas foram importantes para os alunos, ao passo que, a grande maioria respondeu positivamente ao questionário de satisfação.

Tabela 7 – Sexto ano B

Questões	😊	😐	😞	Ausente
Pesquisa na internet	15	2	0	0
Construção dos poliedros	11	6	0	0
Imersão no líquido de bolhas	15	1	0	1
Aprendeu novos conceitos	15	-	2	-

Tabela 8 – Oitavo ano

Questões	😊	😐	😞	Ausente
Pesquisa na internet	24	3	0	0
Construção dos poliedros	15	12	0	0
Imersão no líquido de bolhas	20	3	3	1
Aprendeu novos conceitos	21	-	6	-

Nas Figuras 63, 64, 65 e 66 estão algumas respostas dos alunos para a quarta questão, referente aos conceitos geométricos aprendidos durante as atividade.

4) Você considera que tenha aprendido novos conceitos geométricos durante a atividade de construção de poliedros e imersão no líquido de bolhas?

☒ 😊 Quais? *Aprendi sobre ângulos, ~~plano~~ pontos, reta, etc*
linhas que a aula em si foi muito divertida.

() 😞

Figura 63 – Resposta aluno 1

4) Você considera que tenha aprendido novos conceitos geométricos durante a atividade de construção de poliedros e imersão no líquido de bolhas?

☒ 😊 Quais? *Aprendi o que é um ponto uma reta um plano*
um aresta, vértices entre outras aprendi figuras geométricas
que nós conhecemos.

() 😞

Figura 64 – Resposta aluno 2

No final do questionário, os alunos podiam fazer sugestões para as próximas atividades de matemática. Um grande número de estudantes demonstrou interesse por aulas no laboratório de informática e por aulas práticas, pedindo mais construções de poliedros e experimentos com película de sabão. Veja nas Figuras 67, 68, 69 e 70 as sugestões escritas por alguns alunos:

- 4) Você considera que tenha aprendido novos conceitos geométricos durante a atividade de construção de poliedros e imersão no líquido de bolhas?
- (X) 😊 Quais? Sim, cubo, quadrado, triângulo, significado de geometria,...
- () 😞

Figura 65 – Resposta aluno 3

- 4) Você considera que tenha aprendido novos conceitos geométricos durante a atividade de construção de poliedros e imersão no líquido de bolhas?
- (X) 😊 Quais? Mais o menos, eu aprendi algumas coisas sobre, cubo, seta, triângulo...
- () 😞

Figura 66 – Resposta aluno 4

Use o espaço abaixo para deixar sugestões para as próximas atividades:

- Mais aulas práticas;
- Mais laboratório;
- Mais trabalhos em grupo;

Figura 67 – Sugestão aluno 5

Use o espaço abaixo para deixar sugestões para as próximas atividades:

Seu mais aulas assim porque auxilia o aprendizado obrigatório por estas aulas

Figura 68 – Sugestão aluno 6

Use o espaço abaixo para deixar sugestões para as próximas atividades:

no laboratório, e ~~mais~~ ~~mais~~ construções de outros poliedros e outras aulas com Bolhas.

Figura 69 – Sugestão aluno 7

Use o espaço abaixo para deixar sugestões para as próximas atividades:

Mais aula no laboratório, bastante
trabalhos como esse que agente aprendeu
bastante coisas legais, ~~mais~~

Figura 70 – Sugestão aluno 8

7 Conclusões

Em relação à Geometria Espacial, a maneira mais eficiente de trabalhar é com a utilização de recursos que possibilitem uma melhor visualização dos objetos. As opções mais lembradas, geralmente, são as tecnologias com o uso de softwares ou, através da utilização de material concreto. Como sabe-se que nem todas as escolas possuem recursos tecnológicos para se trabalhar com ferramentas de Geometria Dinâmica, a segunda opção geralmente é a adotada.

Uma maneira simples, barata e bastante eficiente para desenvolver o ensino de Geometria, é através das construções, com uso de material concreto. Esta maneira de abordar conceitos pode ser utilizada tanto na Geometria Plana como na Espacial, que os resultados no aprendizado são bem satisfatórios.

Apesar disso, ainda há relatos de carência e até ausência de ensino de Geometria nas escolas. Acredita-se que a falta de valorização em relação à abordagem a este ramo da Matemática, não seja mais por culpa dos livros didáticos, que hoje disponibilizam um vasto espaço aos conceitos geométricos, mas pela maneira tradicional ainda enraizada na maioria dos professores e escolas, que priorizam a Álgebra e Aritmética em detrimento à Geometria.

Através da percepção desta carência e dada a importância que a Geometria possui no desenvolvimento utilitário e formativo do ser humano, sentiu-se a necessidade de propor atividades motivadoras, tanto para alunos, quanto para professores, com o objetivo que o ensino de Geometria fosse valorizado e mais trabalhado nas escolas.

Assim, ao conhecer, por meio de um vídeo na internet, a técnica de obtenção de bolha quadrada usando poliedros de canudos e solução de água e detergente, surgiu a ideia de aplicar esta atividade em sala de aula. A princípio, o objetivo foi apenas lúdico, sem a finalidade de aprender conceitos, mas com o intuito de avaliar o entusiasmo ou não dos alunos ao manusear estes materiais.

Como a aceitação das atividades por parte dos alunos foi positiva, começou-se a pesquisa de como elas poderiam ser aproveitadas para melhorar o ensino de Geometria, e que conceitos poderiam ser abordados através delas. Além disso, propor alterações na proposta inicial a fim de aperfeiçoá-las e otimizar o aprendizado.

Neste trabalho, portanto, foram apresentadas as recomendações metodológicas de atividades relacionadas à Geometria, bem como o relato da aplicação das mesmas em uma turma do oitavo e em duas turmas do sexto ano do ensino fundamental.

Estas atividades foram desenvolvidas, basicamente, com uso de materiais mani-

puláveis: *netbooks* para a pesquisa na internet; canudos, cordões, arames, etc., para as construções dos poliedros; água, detergente e bacia, na imersão dos sólidos geométricos construídos; e uso de diversos livros didáticos de matemática para a elaboração do glossário com os termos geométricos utilizados durante as atividades.

No decorrer destas aulas, foi possível, com as atividades desenvolvidas, relacionar a parte teórica, como por exemplo, as definições e propriedades dos polígonos e poliedros, às situações cotidianas, salientando para a presença e importância destas propriedades em objetos utilizados e observados no dia a dia, bem como as indispensáveis propriedades utilizadas na construção civil.

Com as construções dos poliedros, e realização das demais atividades, os estudantes puderam compreender melhor os elementos dos polígonos e poliedros pesquisados na internet, como também, compreender o conceito de ângulo e a presença deles nos sólidos construídos, e em inúmeras situações do dia a dia.

Na imersão dos poliedros na solução de água e detergente, os estudantes conseguiram elaborar uma ideia do que vem a ser os conceitos primitivos de ponto, reta e plano através das películas formadas no interior dos sólidos e suas interseções.

Finalmente, na elaboração do glossário, foi possível recapitular e definir os principais conceitos relacionados à Geometria trabalhados durante as atividades. Grande parte desses conceitos foram novamente observados nos poliedros construídos.

Pôde-se perceber um alto grau de envolvimento dos alunos. Os mesmos, sentiram-se motivados em participar das aulas por serem diferentes das tradicionais. O uso de material concreto influenciou positivamente neste aspecto, deixando as aulas mais dinâmicas. O processo de construção dos poliedros foi desafiador, e em uma das construções o trabalho foi realizado em grupo, promovendo uma maior socialização entre os colegas de turma. Em relação a imersão dos mesmos, os estudantes sentiram-se curiosos, ao passo que os formatos das películas foram modificando-se a cada poliedro imerso.

Conclui-se, portanto, que a maioria dos objetivos propostos para estas atividades foram alcançados. Os alunos puderam compreender, de maneira prática e gradual, conceitos geométricos elementares, que servirão de base para um aprendizado mais aprofundado e significativo futuramente.

No processo de pesquisa, elaboração e aplicação das atividades abordadas neste trabalho, não somente os alunos foram beneficiados com novos aprendizados, mas o professor também pôde aprimorar ainda mais seus conhecimentos, e isso contribuirá significativamente em suas práticas pedagógicas.

Em relação a trabalhos futuros, pretende-se elaborar atividades para serem aplicadas no ensino médio, usando esta mesma técnica de construção de poliedros e imersão em água e detergente. São diversos os conteúdos que podem ser abordados a partir desta

dinâmica, entre eles, o teorema da interseção de dois planos e o teorema dos três planos secantes, que poderão ser visualizados através das películas de sabão formadas no interior dos poliedros.

Referências

- ALVES, E. M. S. *A ludicidade e o ensino de matemática*. 4. ed. Campinas: Editora Papirus, 2007. Citado na página 52.
- BEZERRA, M. J.; SCHWARZ, O.; BEZERRA, R. Z. *Geometria*. 2. ed. Rio de Janeiro: Editora Funema, 1982. v. 1. Citado 3 vezes nas páginas 31, 32 e 33.
- BIANCHINI, E. *Matemática*. 2. ed. São Paulo: Editora Moderna, 1988. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 48.
- BIANCHINI, E. *Matemática*. 7. ed. São Paulo: Editora Moderna, 2011. Citado 2 vezes nas páginas 48 e 49.
- BIANCHINI, E. *Matemática - 6º ano*. 7. ed. São Paulo: Editora Moderna, 2011. Citado na página 78.
- BIANCHINI, E. *Matemática - 6º ano*. 7. ed. São Paulo: Editora Moderna, 2015. Citado na página 78.
- BIANCHINI, E. *Matemática - 8º ano*. 8. ed. São Paulo: Editora Moderna, 2015. Citado na página 78.
- BRASIL. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Tecnologias da comunicação e Informação*. Brasília, 1998. Disponível em: <<http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/introducao.pdf>>. Citado 3 vezes nas páginas 15, 45 e 51.
- CARVALHO, J. B. P. F. de et al. *Matemática - Ensino Fundamental*. Brasília: MEC/SEF, 2010. v. 17. Citado na página 50.
- CASTRUCCI, B.; GIOVANNI, J. R. *A Conquista da Matemática - 7ª série*. 1. ed. São Paulo: Editora FTD, 1992. Citado na página 78.
- CHAGAS, T. S. P. *Bolhas de Sabão na Educação Matemática: explorando a dedução-lógica*. Dissertação (Mestrado) — Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2014. Trabalho de Conclusão de Curso. Disponível em: <<http://www.profmat-sbm.org.br/dissertacoes?polo=&titulo=&aluno=thiago+salvador+pacheco+chagas>>. Acesso em: 21.09.2016. Citado na página 15.
- CHAVES, J. de O. *Geometria Espacial no Ensino Fundamental: Uma Reflexão sobre as propostas metodológicas*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Viçosa, 2013. Trabalho de Conclusão de Curso. Disponível em: <www.locus.ufv.br>. Acesso em: 24.05.2017. Citado 3 vezes nas páginas 15, 16 e 52.
- CONTIJO, H. K. C. *Teorema de Euler em sala de aula*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Goiás, 2014. Trabalho de Conclusão de Curso. Disponível em: <www.repositorio.bc.ufg.br>. Acesso em: 24.05.2017. Citado na página 15.
- CORREA, U. L. D. *O estudo da Geometria Plana através de canudos: Fazendo e aprendendo*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual da Paraíba, 2013. Trabalho de Conclusão de Curso. Disponível em: <www.dspace.bc.uepb.edu.br>. Acesso em: 24.05.2017. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 52.

- DANTE, L. R. *Matemática - Projeto Teláris - 8º ano*. 1. ed. São Paulo: Editora Ática, 2013. Citado na página 78.
- DANTE, L. R. *Matemática - Projeto Teláris - 6º ano*. 2. ed. São Paulo: Editora Ática, 2015. Citado na página 78.
- DANTE, L. R. *Projeto Teláris: matemática*. 2. ed. São Paulo: Editora Ática, 2016. Citado na página 49.
- DOLCE, O.; POMPEO, J. N. *Fundamentos de Matemática Elementar - Geometria Plana*. 7. ed. São Paulo: Editora Atual, 1995. v. 9. Citado 10 vezes nas páginas 20, 21, 23, 24, 25, 30, 31, 32, 33 e 35.
- DOLCE, O.; POMPEO, J. N. *Fundamentos de Matemática Elementar - Geometria Espacial, posição e métrica*. 6. ed. São Paulo: Editora Saraiva, 2006. v. 10. Citado 9 vezes nas páginas 21, 22, 23, 24, 25, 26, 38, 39 e 40.
- DÓRIA, R. *A transformação que a educação precisa*. 2016. Disponível em: <fiv.org.br/index.php/web-tv/item/>. Acesso em: 02.03.2017. Citado na página 51.
- FONSECA, M. da C. F. R. et al. *O Ensino de Geometria na Escola Fundamental*. 3. ed. Belo Horizonte: Editora Autêntica, 2009. Citado na página 51.
- GAY, M. R. G. *Projeto Araribá - Matemática - 6º ano*. 4. ed. São Paulo: Editora Moderna, 2014. Citado na página 78.
- IMENES, L. M.; LELLIS, M. *Conversa com o professor: Matemática*. Brasília: MEC/SEF, 1996. Citado na página 50.
- IMENES, L. M.; LELLIS, M. *Matemática*. 1. ed. São Paulo: Editora Scipione, 1997. Citado na página 48.
- ITZCOVICH, H. *Iniciação ao Estudo Didático da Geometria*. 1. ed. São Paulo: Editora Brasilform, 2014. Citado na página 50.
- JÚNIOR, J. R. G.; CASTRUCCI, B. *A Conquista da Matemática - 6º ano*. 1. ed. São Paulo: Editora FTD, 2009. Citado na página 78.
- JÚNIOR, M. P. C. *Algumas técnicas de construção de alguns poliedros e sua aplicação no ensino*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual Paulista - Júlio de Mesquita Filho, 2014. Trabalho de Conclusão de Curso. Disponível em: <https://sca.proformat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=1130>. Acesso em: 14.06.2017. Citado na página 16.
- LEONARDO, F. M. de. *Matemática - 7º ano*. 3. ed. São Paulo: Editora Moderna, 2010. Citado na página 78.
- LUCAS, V. C. *Resgate da Geometria no Ensino Fundamenta*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Espírito Santo, 2016. Trabalho de Conclusão de Curso. Disponível em: <https://sca.proformat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=1529>. Acesso em: 14.06.2017. Citado na página 16.
- NETO, A. C. M. *Geometria*. 1. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2013. v. 1. Citado 9 vezes nas páginas 20, 21, 26, 28, 29, 30, 33, 36 e 38.

- NEVES, M. do C.; CARVALHO, C. A importância da afetividade na aprendizagem da matemática em contexto escolar: Um estudo de caso com alunos do 8.º ano. 2006. Disponível em: <http://www.scielo.mec.pt/scielo.php?pid=S0870-82312006000200007&script=sci_arttext&tlng=en>. Acesso em: 25.05.2017. Citado na página 53.
- OLIVEIRA, N. C. N. *Geometria*. 2008. Disponível em: <mundoeducac~ao.bol.uol.com.br/matemática/geometria-1.htm>. Acesso em: 01.06.2017. Citado na página 49.
- RODRIGUES, F. C.; GAZIRE, E. S. Reflexões sobre uso de material didático manipulável no ensino de matemática: da ação experimental à reflexão. 2012. Disponível em: <<https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2012v7n2p187/23460>>. Acesso em: 14.06.2017. Citado na página 52.
- ROSÁRIO, M. I. C. *Lúdico no ensino aprendizagem matemática fundamental II*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia - Campus de Vitória da Conquista, 2013. Trabalho de Conclusão de Curso. Disponível em: <www.uesb.br>. Acesso em: 15.03.2017. Citado na página 52.
- SARDELLA, A.; MATTA, E. da. *Matemática*. 4. ed. São Paulo: Editora Ática, 1984. Citado 3 vezes nas páginas 16, 47 e 48.
- SOUZA, J.; PATARO, P. M. *Matemática*. 2. ed. São Paulo: Editora FTD, 2012. Citado 2 vezes nas páginas 48 e 49.
- SOUZA, J.; PATARO, P. M. *Matemática - 6º ano*. 2. ed. São Paulo: Editora FTD, 2012. Citado na página 78.
- TOLEDO, M. B. de A.; TOLEDO, M. de A. *Teoria e prática de matemática: como dois e dois*. 1. ed. São Paulo: Editora FTD, 2009. Citado na página 50.
- TROTТА, F. *Matemática*. 1. ed. São Paulo: Editora Scipione, 1985. Citado 3 vezes nas páginas 16, 47 e 48.

Apêndices

APÊNDICE A – Pesquisa na internet

Aluno: _____ **Ano/Turma:** _____

Professor: _____ **Data:** _____

Realize uma pesquisa na internet orientando-se pelos seguintes passos:

- 1) Abra o navegador e digite: www.google.com.br;
- 2) Na janela de pesquisa do Google, digite palavras ou frases que lhe ajudem a responder as questões a seguir;
 - a) O que é Geometria?
 - b) O que são polígonos?
 - c) Quais são os elementos de um polígono?
 - d) O que são poliedros?
 - e) Como os poliedros classificam-se?
 - f) Quais são os principais elementos de um poliedro?
- 3) Após responder as questões acima, faça uma nova pesquisa dos tipos de polígonos e poliedros clicando na janela referente à imagens.
- 4) Escolha duas imagens: uma com tipos de polígonos e outra com tipos de poliedros e imprima as mesmas.

Observação: Cada aluno poderá imprimir no máximo duas páginas. Estes impressos deverão ser levados nas próximas quatro aulas de matemática.

Tarefa para casa: Escreva a seguir nomes de objetos que lembram poliedros. Se possível, leve na próxima aula um objeto que tenha o formato semelhante a um poliedro.

APÊNDICE B – Relacionando conceitos geométricos

Aluno: _____ Ano/Turma: _____

Professor: _____ Data: _____

1) Observe o poliedro que você construiu e responda as questões a seguir:

- a) Quantos canudos você utilizou para construir o tetraedro? _____
- b) Quantos triângulos você consegue contar no tetraedro? _____
- c) Quantos encontros de três canudos existem no tetraedro? _____

2) Após responder as questões anteriores e observando ainda o tetraedro, relacione a primeira coluna de acordo com a segunda:

- (A) Faces () Encontros de canudos
- (B) Vértices () Canudos utilizados
- (C) Arestas () Triângulos encontrados

3) Os principais elementos do tetraedro podem dar a ideia do que vem a ser os conceitos primitivos da Geometria. Com isso, relacione as colunas abaixo:

- (A) Arestas () Ponto
- (B) Vértices () Reta
- (C) Faces () Plano

APÊNDICE C – Aprendendo conceitos geométricos

Aluno: _____ Ano/Turma: _____

Professor: _____ Data: _____

Poliedro construído: _____

Observe o poliedro construído pelo grupo e responda as questões a seguir:

- 1) Quantos canudos você utilizou para construir este poliedro? _____ Os canudos representam um elemento do poliedro, que elemento é esse? _____

- 2) Quantos vértices este poliedro possui? _____
- 3) Qual é o número total de faces deste poliedro? _____
- 4) **As faces dos poliedros são formadas por polígonos.** Qual(is) o(s) formato(s) dos polígonos das faces? _____
- 5) **Em um poliedro existem diversos ÂNGULOS. Os ângulos são formados pela reunião de dois SEGMENTOS DE RETA (canudos).** Observe os polígonos formados nas faces do poliedro que você construiu. Quantos ângulos existem em cada face? _____
- 6) Existe alguma relação entre o número de ângulos internos de um polígono e o número de vértice deste polígono? Explique. _____

- 7) O poliedro que você construiu é rígido ou maleável? _____ Será que esta característica tem relação com o formato das faces do poliedro? Discuta com os colegas dos demais grupos para responder a esta pergunta. _____

APÊNDICE D – Questionário de satisfação

Projeto: Construção de poliedros e imersão no líquido de bolhas

Professor: _____ **Data:** _____

Perfil do Participante

Idade: _____

Ano/Turma: _____

Assinale com X como você considera as atividades que foram realizadas com poliedros e bolhas de sabão.

1) A pesquisa realizada no laboratório de informática foi útil para a construção dos poliedros?

() 😊 () 😐 () ☹️

2) Marque a(s) opção(ões) que melhor lhe define(m) durante as construções dos poliedros.

() 😊 () 😐 () ☹️

3) Como você avalia a aula de imersão dos poliedros no líquido de bolhas?

() 😊 () 😐 () ☹️

4) Você considera que tenha aprendido novos conceitos geométricos durante a atividade de construção de poliedros e imersão no líquido de bolhas?

() 😊 Quais? _____

() ☹️

Use o espaço abaixo para deixar sugestões para as próximas atividades:

APÊNDICE E – Passo a passo

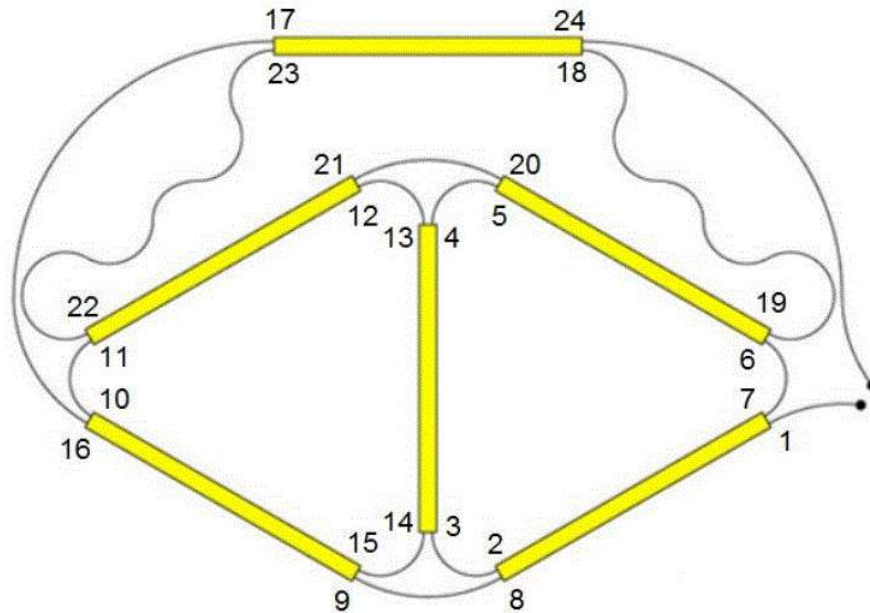


Figura 71 – Passo a passo para construção do tetraedro

Fonte: clubes.obmep.org.br

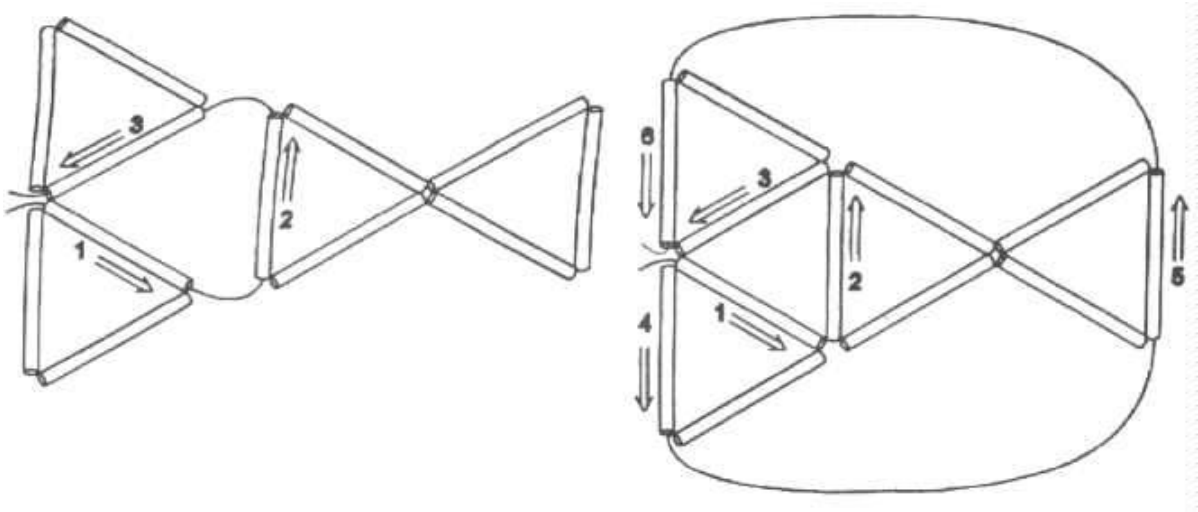


Figura 72 – Passo a passo para construção do octaedro

Fonte: www.jaymeprof.com.br

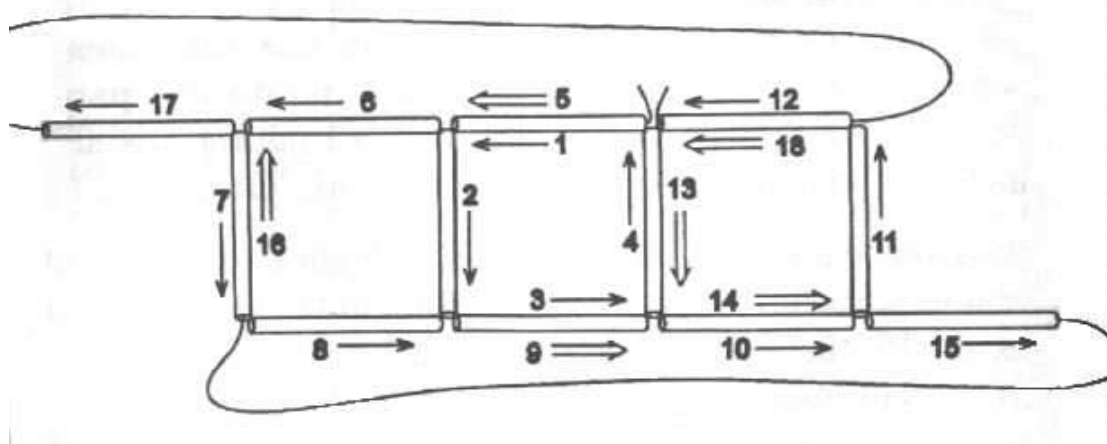


Figura 73 – Passo a passo para construção do hexaedro

Fonte: www.jaymeprof.com.br

Dicas para construção de prismas

- 1) Construa com canudos dois polígonos iguais que serão as bases do poliedro.
- 2) Una com canudos os vértices dos polígonos das bases.